SÉRIE A, N° 4512
N° D'ORDRE : 5359

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Claude HOUARD

1re THÈSE. — **« Etude d'un modèle de particule composée ».**

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

« Le groupe SU (6) dans la physique des particules élémentaires ».

Soutenues le 19 Mai 1965 devant la Commission d'examen.

MM. F. PERRIN — *Président.*
B. D'ESPAGNAT, B. JOUVET, E. ARNOUS — *Examinateurs.*

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15e)
1966

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546825_0063

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : HOUARD

Prénom : Jean-Claude

Date de la soutenance : 19 Mai 1965

Numéro d'ordre : Série A 4512, N° 5359

1

HOUARD (J.-C.). — Etude d'un modèle de particule composée. — *Paris*, Éditions de la Revue d'Optique, 1966, 67 p., 14 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4512, N° 5359.

2

HOUARD (J.-C.). — Etude d'un modèle de particule composée. — *Paris*, Éditions de la Revue d'Optique, 1966, 67 p., 14 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4512, N° 5359.

3

HOUARD (J.-C.). — Etude d'un modèle de particule composée. — *Paris*, Éditions de la Revue d'Optique, 1966, 67 p., 14 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4512, N° 5359.

4

HOUARD (J.-C.). — Etude d'un modèle de particule composée. — *Paris*, Éditions de la Revue d'Optique, 1966, 67 p., 14 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1965, Série A, 4512, N° 5359.

Série A, N° 4512
N° d'ordre : 5359

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Claude HOUARD

1re THÈSE. — **« Etude d'un modèle de particule composée ».**

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

« Le groupe SU (6) dans la physique des particules élémentaires ».

Soutenues le 19 Mai 1965 devant la Commission d'examen.

MM. F. PERRIN — *Président.*
B. D'ESPAGNAT, B. JOUVET, E. ARNOUS — *Examinateurs.*

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15e)
1966

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY

BRELOT	T	Analyse supérieure.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralo. et cristallo.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végé. (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique E. N. S.
CARTAN	T	Mathématiques E. N. S.
LAFFITTE	T	Chimie générale.
N...	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie animale S. P. C. N.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
BOCQUET	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique E. N. S.
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie S. P. C. N. et sédiment (Orsay).
GAUTHERET	T	Biologie végétale P. C. B.
LUCAS R.	T	Recherches physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique enseignement.
SOLEILLET	T	Physique P. C. B.
FORTIER	T	Mécanique exp. des fluides.
DRACH	T	Zoologie.
QUENEY	T	Météo et dynamique atmos.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale S. P. C. N.
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL	T	Arith. et théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Géologie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffrac. élec.
WIEMANN	T	Chimie organ. et structu.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théorie physique.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéral. et cristal.
J. P. MATHIEU	T	Physique optique.
COUTEAUX	T	Cytologie.
MAY	T	Zoologie.
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
GUINIER	T	Physique des solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul dif. et Intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (technique aéron.).
NORMANT	T	Synthèse organique.
BENARD	T	Chimie minérale.
BUVAT	T	Botanique E. N. S.
DUGUE	T	Statistiques mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végé. appli.
MARÉCHAL	T	Optique théo. et appli.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physio. de la nutrition.
LELONG	T	Appli. de l'ana. à la géom.
DEVILLERS	T	Anatomie et histo. comp.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique S. P. C. N.
GLANGEAUD	T	Géogra. phys. et géol.
DODEMENT	T	Mathématiques M. G. P.
PISOT	T	Technique math. de la phys.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMANN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Géologie générale.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique M. G. P.
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques M. P. C.
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Electro techn. géné.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY	T	Biologie végétale P. C. B.
PANNETIER	T	Chimie générale.
BRUN	T	Mécanique des fluides I.
LEDERER	T	Chimie biologique (Orsay).
Mme DUBREIL	T	Mathématiques (agréga.).
Mme LELONG	T	Math. II E. N. S.
BELLAIR	T	Géologie S. P. C. N.
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie E. N. S.
MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Energétique générale.
ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physio. végé.
CASTAING	T	Physique II thermo. (Orsay).
CURIEN	T	Minéralo. et cristal.
MOYSE	T	Physio. végé. (Orsay).
Mme CHARNIAUX-COTTON	T	Evolution des êtres organisés.
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucl. et radioactivi. (Orsay).
TONNELAT	T	Bio. physico. chim. (Orsay).
VILLE	T	Econométrie.
WILLEMART	T	Chimie P. C. B.
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches physiques.
GUINOCHET	T	Biolo. végé. S. P. C. N (Orsay).
ROLLET	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN	T	Chimie S. P. C. N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Electronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique I (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
DENY	T	Mathé. géné. (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).
BRICARD	T	Météor. et physique de l'atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho. physio.
FRIEDEL	T	Physique des solides (Orsay)
M. JULIA	T	Etude des molécules organiques complexes.

(suite en dernière page)

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire du Collège de France.

Je remercie M^r^ le Professeur F. Perrin de m'avoir accordé l'hospitalité dans son laboratoire. M^r^ R. Moch a mis à ma disposition toutes les facilités données aux membres du laboratoire et je l'en remercie.

A M^r^ B. Jouvet, qui est à l'origine de ce travail et qui m'a constamment soutenu et encouragé, j'exprime toute ma reconnaissance.

J'ai également plaisir à remercier M^rs^ les Professeurs E. Arnous et B. d'Espagnat qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie mes camarades de laboratoire pour leur soutien amical et particulièrement M^lles^ G. Bordes et A. Jacquemin qui ont bien voulu relire le manuscrit.

Enfin je remercie vivement M^mes^ M. O. Tocqueville et G. Massei ainsi que M^lle^ M. Carugati qui ont assuré l'exécution matérielle de ce travail.

UNIV. LEIDEN BIBL.

ÉTUDE D'UN MODÈLE DE PARTICULE COMPOSÉE *

PAR

Jean-Claude HOUARD

Laboratoire de Physique atomique et moléculaire, Collège de France

INTRODUCTION

La notion de particule composée est intuitive. C'est en effet une règle de conduite naturelle en physique que de chercher à représenter l'ensemble des phénomènes observables à partir d'un nombre de données aussi restreint que possible. Dans son application à la physique microscopique ce principe invite à chercher s'il est possible d'obtenir une explication des propriétés de toutes les particules connues en ne supposant qu'un petit nombre de particules élémentaires de base dont les autres seraient constituées.

Cette idée trouve une base expérimentale dans la physique nucléaire ; l'observation des masses des noyaux suggère de représenter ceux-ci par des assemblages de nucléons, réunis par une énergie de liaison faible devant leur masse. Les modèles théoriques, que permet de construire la mécanique quantique, traduisent clairement cette conception en attribuant à chaque particule élémentaire un ensemble de grandeurs dynamiques indépendantes.

Par contre, l'utilité de la notion de particule composée apparaît de façon moins évidente dans le domaine des hautes énergies où aucun argument expérimental, analogue à celui de la physique nucléaire, ne peut être avancé ; dans ce domaine, toutes les hypothèses que l'on peut faire sur le caractère composé de certaines particules doivent nécessairement supposer des énergies de liaison comparables aux masses de leurs constituants éventuels. Il s'ensuit que tout choix à priori des particules élémentaires de base apparaît arbitraire.

Cependant, si l'on adopte le langage de la théorie quantique des champs, on doit admettre l'existence d'un lagrangien général susceptible de décrire l'ensemble des particules connues. Il semble alors qu'une distinction théorique entre particule élémentaire et particule composée puisse résulter du fait que ce lagrangien ne doive pas nécessairement être construit avec des champs en nombre égal à celui des particules existantes. Cela permet, par analogie avec le cas de la mécanique quantique non relativiste, de définir les particules composées comme étant celles qui ne correspondent à aucun des champs fondamentaux.

Mais, dans l'ignorance où l'on est du lagrangien général, on peut se poser la question de savoir si, avec une telle définition, il est possible de faire une distinc-

* Ce travail a bénéficié de l'aide du Commissariat à l'Energie Atomique.

tion physique réelle entre particule élémentaire et particule composée et, éventuellement, si des tests expérimentaux d'élémentarité existent.

Une voie d'approche est fournie par un théorème, établi par B. Jouvet [1], qui démontre, sous des conditions qui vont être précisées, qu'à chaque théorie de champs dans laquelle apparaît une particule composée, il est possible de faire correspondre une théorie équivalente, c'est-à-dire conduisant aux mêmes résultats observables, dans laquelle la particule composée est remplacée par une particule élémentaire dont la constante de renormalisation Z est nulle. Les particules composées dont il est question ici sont supposées résulter de l'existence entre leurs constituants d'une interaction par un couplage de contact du type de Fermi ; le pôle qui leur est associé dans l'amplitude de diffusion des deux constituants est alors contenu dans la somme des diagrammes en chaîne qui contribuent à cette amplitude. Nous désignerons ces particules sous le nom de particules du type chaîne [1]. Dans la théorie où la particule composée est considérée comme élémentaire elle est couplée à ses constituants par un couplage du type de Yukawa et la condition d'annulation de Z fournit une relation entre sa masse et sa constante de couplage avec ses constituants.

Très généralement, la condition $Z = 0$ se comprend bien physiquement, puisque la constante de renormalisation associée à une particule élémentaire représente la probabilité d'observer la particule nue dans l'état qui correspond à la particule physique et puisque, par définition, aucune particule nue n'est associée à une particule composée.

Cependant, il y a lieu de préciser la signification mathématique qu'il faut attribuer à l'équation $Z = 0$, ceci pour deux raisons. Tout d'abord se pose la question délicate de l'existence mathématique des constantes de renormalisation. Nous n'avons pas ici pour but d'examiner ce problème et nous envisagerons donc toujours des théories telles que les intégrales qui définissent ces constantes sont convergentes, grâce à une fonction de coupure, ce qui permet de dégager le mieux possible le sens physique de la constante Z. Ensuite il faut remarquer que, même si les constantes de renormalisation sont bien définies, les formulations usuelles de la théorie quantique des champs doivent nécessairement supposer celles-ci non nulles. Les deux types de théories que nous voulons étudier étant dites équivalentes si les résultats observables qui s'en déduisent sont identiques, nous définirons l'équivalence par l'égalité des matrices S. C'est donc dans l'expression de la matrice S que nous devons chercher à annuler Z.

Deux définitions de la matrice S peuvent être considérées. La première est celle de la théorie stationnaire des collisions dans laquelle les états asymptotiques du système sont définis à partir des champs incidents et émergents. La matrice S qui en résulte dépend des paramètres qui définissent la théorie et donc des constantes de renormalisation ; nous dirons alors que la théorie de la particule composée est équivalente à la théorie de la particule élémentaire de Z nul si la matrice S de la première théorie est égale à la limite, lorsque Z tend vers 0, de la matrice S de la seconde théorie.

Une deuxième définition de la matrice S, basée sur la théorie des phénomènes

[1] Par contre, les particules composées qui résultent d'une interaction produite par l'échange d'une particule entre les deux constituants seront qualifiées de particules du type échelle.

dépendant du temps, est obtenue par la théorie des perturbations. La matrice $\boldsymbol{S}$ est ici considérée comme une fonctionnelle des propagateurs renormalisés qui sont attachés aux divers champs. Ces propagateurs dépendent des constantes de renormalisation. On est ainsi conduit, suivant B. Jouvet, à une deuxième définition de l'équivalence qui a, sur la première, l'avantage de mieux se prêter à une étude générale ; nous dirons que les deux théories sont équivalentes au sens de la théorie des perturbations si la matrice $\boldsymbol{S}$ de la théorie de la particule composée est égale à la matrice $\boldsymbol{S}$ de la théorie de la particule élémentaire calculée avec le propagateur qui correspond à la valeur 0 de la constante Z. A priori les deux définitions de l'équivalence que l'on vient de donner peuvent éventuellement conduire à des résultats différents.

Le but de ce travail est d'étudier, sur un exemple soluble, la formulation des théories de particules composées définies par l'annulation d'une constante de renormalisation, ainsi que les conséquences qui peuvent résulter de cette annulation, en particulier en ce qui concerne les différences observables permettant de distinguer une particule élémentaire d'une particule composée.

Afin de pouvoir effectuer des calculs aussi complets que possible nous choisissons un modèle simple, le modèle de Lee [2, 3], qui décrit trois particules élémentaires $\mathbf{V}$, $\mathbf{N}$, $\boldsymbol{\theta}$, en interaction par un couplage de Yukawa qui permet les deux réactions $\mathbf{V} \rightleftarrows \mathbf{N}\boldsymbol{\theta}$. Ce modèle est défini par quatre paramètres qui sont les trois masses $m_{\mathbf{V}}$, $m_{\mathbf{N}}$, μ et la constante de couplage observable g (ce paramètre sera éventuellement remplacé par la constante de renormalisation Z de la particule $\mathbf{V}$, qui est fonction des quatre paramètres précédents). Le modèle de Lee est comparé à un modèle où seules les particules $\mathbf{N}$ et $\boldsymbol{\theta}$ sont élémentaires tandis que la particule $\mathbf{V}$ est composée et dans lequel l'unique réaction permise $\mathbf{N}\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{N}\boldsymbol{\theta}$ résulte d'un couplage du type de Fermi (²). Les masses $m_{\mathbf{N}}$, μ et la constante de couplage de Fermi λ suffisent à la spécification de ce nouveau modèle qui ne dépend donc que de trois paramètres.

On voit tout de suite que l'hypothèse d'une équivalence éventuelle des deux modèles doit imposer l'existence d'une relation entre les paramètres qui définissent le modèle de Lee. En effet, dans le modèle F, la masse $m_{\mathbf{V}}$ de la particule $\mathbf{V}$ composée est fonction des constantes $m_{\mathbf{N}}$, μ et λ, de sorte qu'inversement la donnée des trois masses détermine la constante λ ; si ce modèle est équivalent à un modèle de Lee, la constante g doit, elle aussi, être déterminée, ce qui signifie que les quatre paramètres $m_{\mathbf{V}}$, $m_{\mathbf{N}}$, μ et g doivent satisfaire une relation, qui constitue une condition nécessaire d'équivalence. En reprenant des résultats déjà publiés [4, 5], nous montrons aux paragraphes I.1 et I.2 que cette relation n'est autre que la condition d'annulation de Z. Dans ces deux paragraphes, on adopte le point de vue de la théorie stationnaire des collisions et l'on construit la matrice de diffusion $\mathbf{N}\boldsymbol{\theta}$ dans les deux modèles à partir des états propres qui appartiennent au secteur le plus simple, c'est-à-dire au sous-espace qui possède les nombres quantiques de la particule $\mathbf{V}$. La relation $Z = 0$ est alors déduite des conditions d'identification de ces deux éléments de matrice $\boldsymbol{S}$. On montre également que cette identification peut

(²) Ces deux modèles seront, dans la suite, fréquemment désignés par les noms de modèle Y et modèle F qui rappellent la nature du couplage fondamental.

être obtenue de façon continue en faisant tendre Z vers 0 dans le modèle de Lee et que la même propriété de limite existe aussi pour les états propres.

Ce résultat partiel ne démontre cependant pas que la condition $Z = 0$ est suffisante pour assurer une équivalence complète des deux modèles. Un argument général, qui sera donné au paragraphe I.3, permet d'obtenir une preuve formelle de l'équivalence, dont le résultat rejoint les théories des champs quasi locaux qui ont déjà été proposées pour la description des particules composées [6]. Nous montrerons que, dans un formalisme lagrangien du modèle de Lee, la relation $Z = 0$ peut être interprétée comme une contrainte entre les champs qui permet d'obtenir l'expression d'un champ quasi local pour la particule **V** composée. Il est alors possible d'éliminer le champ de la particule **V** de l'hamiltonien de Lee, qui devient ainsi identique à l'hamiltonien du modèle F et doit donc conduire aux mêmes résultats observables.

Mais un point de comparaison plus intéressant entre particule élémentaire et particule composée est donné par la théorie des perturbations. Il résulte en effet de la forme des couplages que les diagrammes des deux modèles considérés ici présentent entre eux une correspondance topologique simple, qui associe chaque série de chaînes du modèle F au propagateur renormalisé du modèle Y, ceci tant que la particule **V** ne figure que dans les états intermédiaires. D'autre part, l'expression de ce propagateur renormalisé rend évidentes les propriétés d'identification des deux modèles, dans le secteur de la particule **V**, sous la condition d'annulation de Z. Ces propriétés nous amènent naturellement, au paragraphe I.4, à définir un propagateur pour la particule composée par la somme des diagrammes en chaîne ; il en résulte que, pour les processus dans lesquels la particule **V** n'intervient pas comme particule externe, les amplitudes de diffusion sont décrites par les mêmes diagrammes dans les deux modèles, de telle façon que les règles de Feynman à appliquer dans le cas du modèle F se déduisent de celles du modèle Y en remplaçant le propagateur renormalisé de la particule **V** élémentaire et la constante de couplage observable g par leurs limites pour $Z \to 0$. De ce point de vue les particules élémentaire et composée doivent être traitées de la même façon et ne peuvent se distinguer l'une de l'autre que par les propriétés de leurs propagateurs.

L'étude de ces propagateurs fait l'objet du second chapitre. La différence la plus évidente entre le propagateur de la particule élémentaire et celui de la particule composée réside dans leur comportement asymptotique qui est étudié au paragraphe II.1. La limite asymptotique du propagateur, qui est donnée par $1/Z\, p_0$ dans le cas d'une particule élémentaire, est modifiée par le passage à la limite $Z \to 0$ et devient constante dans le cas de la particule composée. Cette différence est expliquée par la présence, dans le modèle Y, d'une résonance de diffusion dont l'énergie s'éloigne indéfiniment quand Z tend vers 0.

Du point de vue mathématique, le comportement asymptotique du propagateur de la particule **V** composée a pour conséquence que celui-ci ne peut satisfaire à la formule spectrale classique de Lehmann ; en effet, cette dernière ne peut décrire que des propagateurs qui s'annulent asymptotiquement. On donne au paragraphe II.2 une démonstration directe des formules spectrales dans les deux modèles. La fonction spectrale du modèle F est trouvée égale à la limite de celle du

modèle Y, mais un terme constant, qui est dû au comportement à l'infini de la partie réelle du propagateur, s'ajoute à l'intégrale spectrale. On établit ensuite quelques propriétés de ces fonctions spectrales et, notamment, de leur intégrale, qui est reliée à l'anticommutateur du champ de la particule **V**, que celle-ci soit élémentaire ou composée.

La différence qui existe entre les deux formules spectrales est, en principe, observable puisqu'elle doit se retrouver dans les relations de dispersion. D'une manière générale, les relations de dispersion, qui ne reposent que sur la causalité, la condition asymptotique et la symétrie de croisement, peuvent être établies sans faire d'hypothèse sur l'élémentarité des particules mises en jeu. Toutefois, le comportement asymptotique des amplitudes reste inconnu. Dans le cas des deux modèles étudiés ici, les relations de dispersion pour la diffusion $\mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}$ sont établies directement au paragraphe II.3. On montre que le comportement asymptotique de l'amplitude dans le modèle F est relié à l'existence d'un commutateur à temps égaux, ce qui traduit simplement le fait que les grandeurs dynamiques qui sont attachées à la particule composée ne sont pas indépendantes de celles qui définissent les particules élémentaires **N** et $\boldsymbol{\theta}$ qui la constituent. La forme de la relation de dispersion que l'on obtient dépend donc de la nature de la particule **V** et, par suite, constitue un test d'élémentarité pour cette particule. Cependant le test est affaibli par l'existence, mentionnée plus haut, de la résonance de diffusion $\mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}$ dans le modèle Y qui apporte à l'intégrale de dispersion une contribution exactement égale à la constante qui doit apparaître dans le cas où la particule **V** est composée. Ce phénomène donne, en tout cas, une explication plus physique de cette constante qui représente la contribution d'une résonance qui s'est éloignée indéfiniment.

La seconde partie a pour but l'extension des résultats du premier chapitre aux cas des processus dans lesquels la particule **V** appartient à l'état initial ou à l'état final. Nous considérons successivement le point de vue stationnaire et celui de la théorie des perturbations. A côté de certains résultats généraux, on donne la solution explicite des deux modèles dans le secteur $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta} \rightleftarrows \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$. Les équations rencontrées peuvent être toutes ramenées à un type nouveau d'équation intégrale dont nous donnons la solution générale en appendice.

Au chapitre III on effectue la diagonalisation des deux modèles dans le secteur $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta} \rightleftarrows \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$ et l'on démontre que les valeurs propres et les états propres du modèle de Lee tendent, quand Z tend vers 0, vers les valeurs propres et les états propres qui leur correspondent dans le modèle F.

Les résultats qui sont exposés dans le chapitre IV complètent, dans le cadre de la théorie des perturbations, le parallèle entre particule élémentaire et particule composée. Il s'agit essentiellement de justifier l'usage des diagrammes du modèle Y dans le cas où la particule **V** est composée, pour le calcul des amplitudes dans lesquelles la particule composée fait partie des particules entrantes ou sortantes. Une démonstration, basée sur une formule de Mandelstam [16], fait l'objet du paragraphe IV.1. Pour le modèle de Lee une simple vérification suffit pour établir le résultat cherché, mais la méthode utilisée permet d'étendre celui-ci au cas d'une particule quelconque du type chaîne, en fournissant une définition de la fonction de vertex d'une telle particule avec ses constituants.

Le paragraphe IV.2 présente le calcul, en théorie des perturbations, des amplitudes de diffusion du secteur $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta} \rightleftarrows \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$ dans les deux modèles. Ces amplitudes s'obtiennent en faisant la somme d'une famille de diagrammes en échelle dans lesquels le propagateur à utiliser pour la particule **V** dépend du modèle. La somme de ces diagrammes est donnée par la solution d'une équation intégrale du type de celle qui est étudiée dans l'appendice. Dans cette équation le comportement asymptotique du propagateur joue un rôle important et l'on peut ainsi mettre directement en évidence l'influence de l'élémentarité de la particule **V** sur les propriétés des amplitudes et notamment sur leur comportement asymptotique.

Pour terminer on trouvera au paragraphe IV.3 quelques indications sur des utilisations possibles des amplitudes précédentes et, notamment, dans l'étude des particules du type échelle ; le traitement de ces dernières se présente actuellement d'une façon différente de celui des particules du type chaîne en raison des difficultés que l'on rencontre en cherchant à construire des modèles de particules élémentaires équivalents.

PREMIÈRE PARTIE

PARTICULE ÉLÉMENTAIRE ET PARTICULE COMPOSÉE

I. Equivalence entre particule composée et particule élémentaire à constante de renormalisation nulle

1. **Description des modèles utilisés.** — Nous considérons d'abord le modèle de Lee [2, 3], dans lequel trois particules **V**, **N** et $\boldsymbol{\theta}$ sont en interaction (modèle Y). Dans le modèle de Lee usuel ces trois particules sont considérées comme élémentaires, ce que l'on traduit en théorie quantique des champs en introduisant, dans le lagrangien de base, trois champs indépendants $\psi_{\mathbf{V}}$, $\psi_{\mathbf{N}}$ et A. Le lagrangien est construit de telle façon que les antiparticules sont absentes de la théorie et que les seuls processus élémentaires possibles sont les deux réactions $\mathbf{V} \rightleftarrows \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}$, qui seront représentées graphiquement par les schémas de la figure 1. Ces règles de sélection entraînent en particulier l'absence de renormalisation pour les particules **N** et $\boldsymbol{\theta}$ ainsi que la conservation des quantités $N_1 = N_{\mathbf{V}} + N_{\mathbf{N}}$, $N_2 = N_{\mathbf{V}} + N_{\boldsymbol{\theta}}$, où $N_{\mathbf{V}}$, $N_{\mathbf{N}}$ et $N_{\boldsymbol{\theta}}$ désignent respectivement les nombres de particules nues **V**, **N** et $\boldsymbol{\theta}$. Les particules **N** et **V** sont supposées statiques et ont donc une énergie indépendante de leur impulsion ; la particule $\boldsymbol{\theta}$ a une énergie relativiste $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}$. On envisage seulement le cas où la particule **V** est stable, c'est-à-dire où la condition $m_{\mathbf{V}} < m_{\mathbf{N}} + \mu$ est remplie.

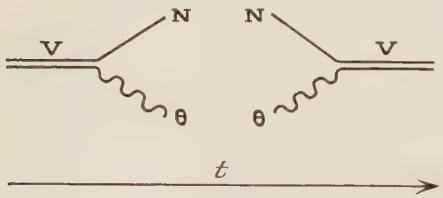


FIG. 1.

Dans l'espace des impulsions l'hamiltonien s'écrit sous la forme $H_Y = H_0 + H_1$,

où H_0 et H_1 sont donnés par les expressions suivantes :

$$H_0 = Z\, m_{\mathbf{V}} \int d\vec{p}\; b^+_{\mathbf{V}}(\vec{p})\; b_{\mathbf{V}}(\vec{p}) + m_{\mathbf{N}} \int d\vec{q}\; b^+_{\mathbf{N}}(\vec{q})\; b_{\mathbf{N}}(\vec{q}) + \\ + \int d\vec{k}\, \omega_k\, a^+(\vec{k})\; a(\vec{k})\,,$$

$$H_1 = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}\; d\vec{q}\; d\vec{k}\; \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k})\; \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}} \times \\ \times \left[b^+_{\mathbf{V}}(\vec{p})\; b_{\mathbf{N}}(\vec{q})\, a(\vec{k}) + b^+_{\mathbf{N}}(\vec{q})\; b_{\mathbf{V}}(\vec{p})\; a^+(\vec{k}) \right] - Z\, \delta m_{\mathbf{V}} \int d\vec{p}\; b^+_{\mathbf{V}}(\vec{p})\; b_{\mathbf{V}}(\vec{p})\,. \tag{I.1}$$

Les opérateurs $b^+_{\mathbf{V}}$, $b^+_{\mathbf{N}}$ et a^+ sont les opérateurs de création renormalisés ; ils vérifient les relations de commutation suivantes, où l'on suppose que les particules **N** et **V** sont des fermions et la particule **θ** un boson,

$$\left\{ b_{\mathbf{V}}(\vec{p}),\, b^+_{\mathbf{V}}(\vec{p}') \right\} = \frac{1}{Z}\, \delta(\vec{p} - \vec{p}')\,, \quad \left\{ b_{\mathbf{N}}(\vec{q}),\, b^+_{\mathbf{N}}(\vec{q}') \right\} = \delta(\vec{q} - \vec{q}')\,, \\ \left[a(\vec{k}),\, a^+(\vec{k}') \right] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')\,, \tag{I.2}$$

les autres commutateurs ou anticommutateurs étant nuls.

Dans les formules (I.1) et (I.2), g désigne la constante de couplage observable **V N θ**, tandis que Z représente la constante de renormalisation de la particule **V** et $\delta m_{\mathbf{V}}$ le terme de renormalisation de masse de cette même particule ; ces deux dernières constantes relient la masse et la constante de couplage nues aux quantités physiques par les formules

$$m^0_{\mathbf{V}} = m_{\mathbf{V}} - \delta m_{\mathbf{V}}\,, \qquad g_0 = g\, Z^{-1/2}\,. \tag{I.3}$$

Une fonction de coupure $f(\omega)$, qui décroît suffisamment vite à l'infini, est introduite afin d'assurer la convergence des intégrales qui définissent les constantes de renormalisation. On suppose également que la constante de couplage nue g_0 est réelle de sorte que l'existence d'un fantôme est exclue [3].

Les lois de conservation du modèle, qui peuvent être établies directement à l'aide des expressions (I.1) de l'hamiltonien, permettent de considérer celui-ci successivement dans chacun des sous-espaces ou secteurs, définis par un couple de valeurs des nombres quantiques N_1 et N_2. Les deux secteurs $N_1 = 1$, $N_2 = 0$ et $N_1 = 0$, $N_2 = 1$ sont respectivement engendrés par les états physiques des particules **N** et **θ** qui sont identiques aux états nus. Après ceux-ci, le secteur le plus simple correspond au choix $N_1 = N_2 = 1$; les états propres de l'hamiltonien qu'il contient sont, outre l'état physique de la particule **V**, les états de diffusion des deux particules **N** et **θ**. Tous les résultats physiques observables que l'on peut déduire de ces états propres sont contenus dans l'élément de la matrice de diffusion qui correspond au processus $\mathbf{N} + \boldsymbol{\theta} \to \mathbf{N} + \boldsymbol{\theta}$; en particulier la masse physique de la particule **V** apparaît simplement comme un pôle de l'amplitude de diffusion élastique **N θ**, dont le résidu fournit le carré de la constante de couplage observable **V N θ**.

Nous posons maintenant le problème de chercher s'il est possible d'obtenir l'élément de matrice de diffusion précédent dans un modèle où la particule **V**, au lieu d'être élémentaire, serait un état lié résultant d'un couplage direct entre les particules **N** et **θ**. Deux champs de base seulement doivent être introduits ; l'inter-

action à considérer ne doit permettre que les transitions $\mathbf{N} \rightarrow \boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{N} + \boldsymbol{\theta}$ de façon à respecter les mêmes lois de conservation que le modèle de Lee. On est ainsi conduit à écrire l'hamiltonien (modèle F) $H_F = H'_0 + H'_1$, avec

$$
\begin{aligned}
H'_0 &= m_N \int d\vec{q}\, b_N^+(\vec{q})\, b_N(\vec{q}) + \int d\vec{k}\, \omega_k\, a^+(\vec{k})\, a(\vec{k}) , \\
H'_1 &= \frac{\lambda}{2\,(2\pi)^3} \int d\vec{q}_1\, d\vec{q}_2\, d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\, \delta(\vec{q}_1 + \vec{k}_1 - \vec{q}_2 - \vec{k}_2) \times \\
&\qquad \times \frac{F(\omega_{k_1})\, F(\omega_{k_2})}{\sqrt{\omega_{k_1}\, \omega_{k_2}}}\, b_N^+(\vec{q}_1)\, b_N(\vec{q}_2)\, a^+(\vec{k}_1)\, a(\vec{k}_2) .
\end{aligned}
\tag{I.4}
$$

Les relations de commutation des opérateurs b_N^+ et a^+ sont évidemment inchangées mais la fonction de coupure $F(\omega)$ peut à priori être différente de celle du modèle de Lee. Ce second modèle admet les deux constantes du mouvement N_N et N_θ, qui correspondent respectivement aux nombres quantiques N_1 et N_2 du modèle de Lee, de sorte que la diagonalisation de l'hamiltonien H_F se présente de façon analogue à celle de l'hamiltonien H_Y.

2. **Secteur $V \prec N\theta$.** — Avec les notations qui viennent d'être définies, les états propres de l'hamiltonien de Lee sont donnés par les formules suivantes [3, 4] :

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{V}_{\vec{p}}\rangle &= Z\, b_V^+(\vec{p})|\,0\rangle + \frac{g}{4\,\pi^{3/2}} \int d\vec{q}\, d\vec{k}\, \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \times \\
&\qquad \times \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\,(\omega_k + m_N - m_V)}\, b_N^+(\vec{q})\, a^+(\vec{k})\,|\,0\rangle , \\
|\mathbf{N}_{\vec{q}_1}\,\boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_1}\rangle^{\pm} &= b_N^+(\vec{q}_1)\, a^+(\vec{k}_1)|\,0\rangle - \frac{g\,Z}{4\,\pi^{3/2}} \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}} \times \\
&\qquad \times \frac{1}{(\omega_{k_1} + m_N - m_V)\,\Phi^{\pm}(\omega_{k_1})}\, b_V^+(\vec{q}_1 + \vec{k}_1)|\,0\rangle - \\
&\quad - \frac{g^2}{2\,(2\pi)^3} \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}} \frac{1}{(\omega_{k_1} + m_N - m_V)\,\Phi^{\pm}(\omega_{k_1})} \times \\
&\quad \times \int d\vec{q}\, d\vec{k}\, \delta(\vec{q} + \vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{k}_1)\, \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\,(\omega_k - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)}\, b_N^+(\vec{q})\, a^+(\vec{k})|\,0\rangle .
\end{aligned}
\tag{I.5}
$$

où $\Phi^{\pm}(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi(\omega \pm \mathbf{i}\,\varepsilon)$ sont les limites au-dessus et au-dessous de l'axe réel de la fonction de variable complexe

$$
\Phi(z) = 1 + \frac{g^2}{4\,\pi^2}\,(z + m_N - m_V) \int_\mu^\infty d\omega\, \frac{f^2(\omega)\,\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_N - m_V)^2\,(\omega - z)} .
\tag{I.6}
$$

Les constantes de renormalisation Z et $\delta\nu = Z\,\delta m_V$ ont pour expression

$$
\begin{aligned}
Z &= 1 - \frac{g^2}{4\,\pi^2} \int_\mu^\infty d\omega\, \frac{f^2(\omega)\,\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_N - m_V)^2} , \\
\delta\nu = Z\,\delta m_V &= -\frac{g^2}{4\,\pi^2} \int_\mu^\infty d\omega\, \frac{f^2(\omega)\,\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{\omega + m_N - m_V} .
\end{aligned}
\tag{I.7}
$$

La matrice $\boldsymbol{S}$ se déduit facilement des états de diffusion ; on a

$$\text{(I.8)} \qquad \langle \vec{q}_f\, \vec{k}_f\, |\boldsymbol{S}_Y| \vec{q}_i\, \vec{k}_i \rangle = {}^{-}\langle \mathbf{N}_{\vec{q}_f}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_f} |\, \mathbf{N}_{\vec{q}_i}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_i} \rangle^{+} =$$

$$= \delta(\vec{q}_i - \vec{q}_f)\, \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f) - \frac{\mathbf{i}\, g^2}{8\,\pi^2} \frac{f(\omega_{k_i})\, f(\omega_{k_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\, \omega_{k_f}}} \times$$

$$\times \frac{1}{(\omega_{k_i} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\, \Phi^{+}(\omega_{k_i})}\, \delta^{(4)}(q_i + k_i - q_f - k_f)\,.$$

Pour le modèle déduit de l'hamiltonien H_F des calculs analogues conduisent aux états de diffusion suivants [4]

$$\text{(I.9)} \qquad |\mathbf{N}_{\vec{q}_1}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_1} \rangle^{\pm} = b^{+}_{\mathbf{N}}(\vec{q}_1)\, a^{+}(\vec{k}_1) |\, 0 \rangle - \frac{\lambda}{2\,(2\,\pi)^3} \frac{F(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}} \frac{1}{\varphi^{\pm}(\omega_{k_1})} \times$$

$$\times \int \mathrm{d}\vec{q}\, \mathrm{d}\vec{k}\, \delta(\vec{q} + \vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{k}_1)\, \frac{F(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\, (\omega_k - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\, \varepsilon)}\, b^{+}_{\mathbf{N}}(\vec{q})\, a^{+}(\vec{k}) |\, 0 \rangle\,,$$

où l'on a posé

$$\text{(I.10)} \qquad \varphi(z) = 1 + \frac{\lambda}{4\,\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{F^2(\omega)\, \sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{\omega - z}\,.$$

On montre, d'autre part, que le modèle contient un état lié $\mathbf{V}'$ de nombres quantiques $N_{\mathbf{N}} = N_{\boldsymbol{\theta}} = 1$, pourvu que soit satisfaite la condition nécessaire et suffisante

$$\text{(I.11)} \qquad \varphi(\mu) < 0\,.$$

Il s'ensuit que la constante λ doit être négative et la fonction $\varphi(z)$ décroissante sur l'intervalle $]-\infty, \mu]$. La masse M de l'état lié est alors l'unique solution de l'équation

$$\text{(I.12)} \qquad \varphi(M - m_{\mathbf{N}}) = 0\,.$$

L'expression de l'état normé en fonction des états nus s'écrit

$$\text{(I.13)} \qquad |\, \mathbf{V}'_{\vec{p}} \rangle = C \int \mathrm{d}\vec{q}\, \mathrm{d}\vec{k}\, \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \times$$

$$\times \frac{F(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\, (\omega_k + m_{\mathbf{N}} - M)}\, b^{+}_{\mathbf{N}}(\vec{q})\, a^{+}(\vec{k})\, |\, 0 \rangle\,,$$

où la constante de normalisation C a pour valeur

$$\text{(I.14)} \qquad C = \left[4\,\pi \int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{F^2(\omega)\, \sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - M)^2} \right]^{-1/2}\,.$$

La matrice de diffusion est alors

$$\text{(I.15)} \qquad \langle \vec{q}_f\, \vec{k}_f\, |\boldsymbol{S}_F| \vec{q}_i\, \vec{k}_i \rangle = \delta(\vec{q}_i - \vec{q}_f)\, \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f) -$$

$$- \frac{\mathbf{i}\, \lambda}{8\,\pi^2} \frac{F(\omega_{k_i})\, F(\omega_{k_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\, \omega_{k_f}}} \frac{1}{\varphi^{+}(\omega_{k_i})}\, \delta^{(4)}(q_i + k_i - q_f - k_f)\,.$$

Les deux éléments de la matrice $\boldsymbol{S}$, donnés par (I.8) et (I.15), seront donc égaux si l'on a

$$g^2\, f(\omega_{k_i})\, f(\omega_{k_f}) / (\omega_{k_i} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\, \Phi^{+}(\omega_{k_i}) = \lambda\, F(\omega_{k_i})\, F(\omega_{k_f}) / \varphi^{+}(\omega_{k_i})\,.$$

En égalant les parties imaginaires des dénominateurs on trouve que les deux fonctions de coupure doivent être identiques ; nous les désignerons désormais par la même notation $f(\omega)$. La condition d'égalité peut alors se mettre sous la forme

$$\text{(I.16)} \qquad g^2 / (z + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\, \Phi(z) = \lambda / \varphi(z)\,.$$

On voit tout d'abord que la fonction $\varphi(z)$ doit admettre le point $m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ comme zéro ; ceci impose que la condition (I.11) soit remplie ; le modèle F possède donc un état lié dont la masse, qui est donnée par (I.12), est nécessairement égale à $m_{\mathbf{V}}$. Dans ces conditions le zéro de $\varphi(z)$ apparaît explicitement dans la formule (I.10), si l'on y remplace la fonction $1/(\omega - z)$ par son développement limité au premier ordre, autour du point $m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$,

$$\frac{1}{\omega - z} \equiv \frac{1}{\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}} + \frac{z + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,(\omega - z)}$$

et l'on obtient

$$\text{(I.17)} \qquad \varphi(z) = \frac{\lambda}{4\,\pi^2}\,(z + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}) \int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{f^2(\omega)\,\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,(\omega - z)}\,.$$

On a d'autre part, à l'aide de (I.6) et (I.7),

$$\text{(I.18)} \qquad \Phi(z) = Z + \frac{g^2}{4\,\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{f^2(\omega)\,\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,(\omega - z)}\,.$$

L'équation (I.16) est maintenant équivalente à la relation

$$\text{(I.19)} \qquad Z = 0\,.$$

En revenant aux expressions (I.7) et (I.10) de Z et de $\varphi(z)$ on voit comment les équations (I.12) et (I.19) précisent les conditions d'identification des deux matrices $\boldsymbol{S}$: les masses $m_{\mathbf{N}}$ et μ étant fixées ainsi que la fonction de coupure $f(\omega)$, les formules (I.12) et (I.19) donnent les constantes de couplage des deux modèles équivalents en fonction de la masse $m_{\mathbf{V}}$. La formule (I.12) exprime simplement que la masse de l'état lié du modèle F dépend des constantes $m_{\mathbf{N}}$, μ et λ qui définissent le modèle, tandis que l'équation (I.19) est une condition qui restreint le choix des paramètres du modèle de Lee correspondant. Sous cette condition la relation (I.12) peut être mise sous la forme suivante, qui exprime la constante λ en fonction des grandeurs propres au modèle de Lee,

$$\text{(I.20)} \qquad \lambda = g^2/\delta\nu\,.$$

En résumé,

a) pourvu que la condition $Z = 0$ soit remplie, les résultats physiques du modèle de Lee sont représentables, au moins en ce qui concerne le secteur $\mathbf{V} \gtrless \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}$, par le modèle d'hamiltonien $H_{\mathbf{F}}$ dans lequel la constante de couplage λ est donnée par (I.20) ;

b) réciproquement, si la constante de couplage du modèle F vérifie l'inégalité (I.11) (existence d'un état lié), celui-ci est équivalent à un modèle de Lee pour lequel la masse $m_{\mathbf{V}}$ est donnée par (I.12) et la constante de couplage g par (I.19).

Il est intéressant de noter que les états propres de l'hamiltonien $H_{\mathbf{F}}$ peuvent être obtenus à partir des états propres de l'hamiltonien de Lee par le passage à la limite $Z \to 0$. Tout d'abord, si l'on fixe les valeurs des masses $m_{\mathbf{V}}$, $m_{\mathbf{N}}$ et μ les formules (I.7) et (I.14) montrent que, quand $Z \to 0$, la constante g^2 tend vers une limite égale à $2\,(2\,\pi)^3\,C^2$. D'autre part, la condition d'égalité (I.16) peut s'écrire, en vertu de (I.17) et (I.18), sous la forme

$$\lim_{Z \to 0} \frac{g^2}{(z + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,\Phi(z)} = \frac{\lambda}{\varphi(z)}\,.$$

On en déduit, à l'aide des expressions (I.5), (I.9) et (I.13), que dans l'espace des états du modèle de Lee les états propres de l'hamiltonien tendent vers des limites, qui appartiennent au sous-espace défini par les nombres quantiques $N_N - N_\theta = 1$ et qui sont identiques aux états propres du modèle F.

Ce qui précède montre aussi que le passage à la limite $Z \to 0$ permet de déduire la matrice S du modèle F, dans le secteur de la particule **V**, à partir de la matrice S du modèle de Lee ; cette propriété sera utilisée au paragraphe I.4 pour donner une définition du propagateur de la particule **V** composée.

3. **Interprétation de l'équivalence dans le formalisme lagrangien.** — Les équations (I.19) et (I.20) ne représentent encore que des conditions nécessaires d'équivalence des modèles F et Y, et les raisonnements du paragraphe I.2 ne nous assurent de l'égalité des matrices de diffusion que dans le secteur de la particule **V**. Nous donnons ici un argument qui, bien que formel, permet d'admettre, au moins de façon provisoire, l'équivalence des deux modèles dans tous les secteurs, sous la condition $Z = 0$. La méthode utilisée permet de raccorder les idées qui sont présentées ici à la notion de champ quasi local associé à une particule composée [6].

Au paragraphe précédent, le passage à la limite $Z \to 0$ nous a permis de donner un sens à l'équation $Z = 0$ dans l'expression des résultats observables de la théorie, c'est-à-dire dans la matrice S. Mais la condition d'annulation de Z semble soulever quelques difficultés si on la replace dans le formalisme de la théorie des champs dont la matrice S est issue. Par exemple, la relation d'anticommutation (I.2) du champ ψ_V, qui fait intervenir la constante $1/Z$, perd son sens si Z est nul.

Nous allons montrer que la condition $Z = 0$, introduite dans le formalisme lagrangien, entraîne l'existence d'une relation de contrainte algébrique entre les trois champs fondamentaux du modèle Y. Cette relation réduit le nombre de champs indépendants aux deux champs ψ_N et A ; elle permet d'éliminer le champ de la particule **V** de toutes les formules qui deviennent ainsi identiques à celles du modèle F.

Le modèle de Lee renormalisé peut se déduire du lagrangien suivant, écrit dans l'espace des impulsions,

$$L(t) = Z\,\mathbf{i} \int \mathrm{d}\vec{p}\; b_V^+(\vec{p}, t)\, \dot{b}_V(\vec{p}, t) + \mathbf{i} \int \mathrm{d}\vec{q}\; b_N^+(\vec{q}, t)\, \dot{b}_N(\vec{q}, t) + \\ + \mathbf{i} \int \mathrm{d}\vec{k}\; a^+(\vec{k}, t)\, \dot{a}(\vec{k}, t) - H_Y(t)\,,$$

où $H_Y(t)$ représente l'hamiltonien (I.1) exprimé en fonction des champs de la représentation de Heisenberg. Les champs conjugués des champs b_V, b_N et a sont respectivement :

$$\Pi_V(\vec{p}, t) = Z\,\mathbf{i}\, b_V^+(\vec{p}, t)\,, \quad \Pi_N(\vec{q}, t) = \mathbf{i}\, b_N^+(\vec{q}, t)\,, \quad \Pi_\theta(\vec{k}, t) = \mathbf{i}\, a^+(\vec{k}, t)\,.$$

Par les méthodes usuelles on retrouve alors l'hamiltonien H_Y ainsi que les relations de commutation (I.2).

Si $Z = 0$ le moment conjugué correspondant à la particule **V** s'annule et la relation de commutation canonique qui lui est associée ne peut être écrite. Ceci signifie en réalité que le champ b_V n'est plus indépendant des champs b_N et a ; l'équation de Lagrange relative à b_V s'écrit, en effet,

$$(I.21)\qquad Z\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial t} - m_{\mathbf{V}}\right) b_{\mathbf{V}}(\vec{p}, t) = -\,\delta\nu\, b_{\mathbf{V}}(\vec{p}, t) - \\ - \frac{g}{4\pi^{3/2}} \int \mathrm{d}\vec{q}\,\mathrm{d}\vec{k}\,\delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k})\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\, b_{\mathbf{N}}(\vec{q}, t)\, a(\vec{k}, t)\,.$$

Pour $Z = 0$ cette équation se réduit à la relation suivante, par laquelle le champ $b_{\mathbf{V}}$ est exprimé en fonction des champs $b_{\mathbf{N}}$ et a,

$$(I.22)\quad b_{\mathbf{V}}(\vec{p}, t) = -\frac{g}{4\pi^{3/2}\,\delta\nu} \int \mathrm{d}\vec{q}\,\mathrm{d}\vec{k}\,\delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k})\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\, b_{\mathbf{N}}(\vec{q}, t)\, a(\vec{k}, t)\,.$$

L'élimination du champ $b_{\mathbf{V}}$ de l'hamiltonien H_Y conduit bien alors à l'hamiltonien H_F dans lequel la constante de couplage est donnée par $\lambda = g^2/\delta\nu$. On retrouve ainsi la relation d'identification (I.20), mais le résultat est de portée plus générale puisqu'il concerne, non plus la restriction des hamiltoniens à un secteur particulier, mais les hamiltoniens eux-mêmes. L'élimination du champ de la particule **V** peut également être effectuée dans les équations de mouvement des champs $b_{\mathbf{N}}$ et a ; en reportant l'expression (I.22) dans les équations d'évolution de ces champs dans le modèle de Lee, on obtient des équations de mouvement qui sont identiques à celles que l'on déduit directement de l'hamiltonien H_F.

Dans le cadre du modèle F nous désignerons désormais par $\hat{\Psi}_{\mathbf{V}}$ le champ défini par la relation (I.22). Dans l'espace de configuration il sera obtenu à partir des formules suivantes :

$$(I.23)\qquad \begin{cases} \Psi_{\mathbf{V}}(\vec{x}, t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int \mathrm{d}\vec{p}\, \exp(\mathbf{i}\,\vec{p}\,.\,\vec{x})\, b_{\mathbf{V}}(\vec{p}, t)\,, \\ \Psi_{\mathbf{N}}(\vec{x}, t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int \mathrm{d}\vec{q}\, \exp(\mathbf{i}\,\vec{q}\,.\,\vec{x})\, b_{\mathbf{N}}(\vec{q}, t)\,, \\ A(\vec{x}, t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\sqrt{2\,\omega_k}} \exp(\mathbf{i}\,\vec{k}\,.\,\vec{x})\, a(\vec{k}, t), \end{cases}$$

$$(I.24)\qquad f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\vec{k}\, f(\omega_k)\, \exp(\mathbf{i}\,\vec{k}\,.\,\vec{x})\,.$$

En introduisant le courant $j(\vec{x}, t)$ défini par

$$(I.25)\qquad j(\vec{x}, t) = -\,g\,\Psi_{\mathbf{N}}(\vec{x}, t) \int \mathrm{d}\vec{x}'\, f(\vec{x} - \vec{x}')\, A(\vec{x}', t)\,,$$

on a finalement

$$(I.26)\qquad \hat{\Psi}_{\mathbf{V}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\delta\nu}\, j(\vec{x}, t)\,.$$

Le champ $\hat{\Psi}_{\mathbf{V}}(x)$ remplit toutes les conditions qu'il faut exiger d'un champ quasi local pour qu'il puisse être associé à la particule **V** composée. D'après les résultats de la référence [6], il doit donc satisfaire la condition asymptotique ; des vérifications de cette propriété peuvent être faites explicitement, par exemple à l'aide des états de diffusion $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta}$ qui seront obtenus au chapitre III. Bornons-nous à remarquer ici que, comme dans le cas où la particule **V** est élémentaire, on a la formule

$$(I.27)\qquad \langle\, 0\,|\hat{\Psi}_{\mathbf{V}}(x)|\,\mathbf{V}'_{\vec{p}}\,\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left[\mathbf{i}\,(\vec{p}\,.\,\vec{x} - m_{\mathbf{V}}\,t)\right].$$

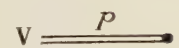
Les considérations qui précèdent ont montré que les équations du mouvement des modèles F et Y, ainsi que l'expression de l'hamiltonien en fonction des champs, peuvent être obtenues à partir du même lagrangien par la méthode canonique usuelle, la distinction entre les deux théories étant faite par le choix $Z \neq 0$ ou $Z = 0$. Ce résultat ne démontre cependant pas que les deux modèles sont reliés entre eux par le passage à la limite $Z \to 0$ car, du fait de la relation d'anticommutation du champ $\psi_{\mathbf{V}}$, cette opération ne peut pas être effectuée dans le formalisme de quantification canonique.

Au paragraphe I.2, par contre, nous avons déjà considéré le passage à la limite $Z \to 0$ sur les états propres et la matrice de diffusion d'un secteur particulier du modèle Y. Nous allons maintenant approfondir la connexion qui est ainsi établie entre les deux modèles en donnant une définition du propagateur de la particule **V** composée.

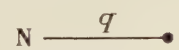
4. **Définition du propagateur de la particule composée.** — Nous examinons ici les deux modèles précédents sous l'aspect de la théorie des perturbations dans laquelle les amplitudes de diffusion peuvent être représentées par des séries de diagrammes de Feynman. Les deux modèles sont tels que les boucles de self-énergie, qui interviennent dans ces diagrammes, sont identiques, ce qui permet de mieux comprendre les conditions d'identification trouvées au paragraphe I.2. Plus généralement, la théorie des perturbations fournit la base d'une démonstration complète et explicite de l'équivalence des modèles F et Y. Dans cette étude c'est la notion de propagateur qui établit le premier point de comparaison entre particule élémentaire et particule composée.

Les règles de Feynman s'établissent sans peine ; en fonction des grandeurs non renormalisées, le calcul des diagrammes du modèle de Lee est soumis aux règles suivantes :

a) *lignes externes*,



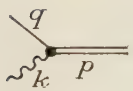
$$\longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}},$$



$$\longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}},$$

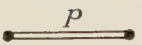
$$\longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}},$$

b) *nœuds*,

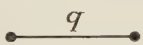


$$\longrightarrow \mathbf{i}\, g_0 (2\pi)^4 f(\omega_k)\, \delta^{(4)}(p - q - k),$$

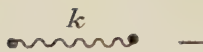
c) *lignes internes*,



$$\longrightarrow S(p) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0 - m_{\mathbf{V}} + \mathbf{i}\varepsilon},$$



$$\longrightarrow s(q) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_0 - m_{\mathbf{N}} + \mathbf{i}\varepsilon},$$



$$\longrightarrow \hat{\Delta}(k) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{k_0 - \omega_k + \mathbf{i}\varepsilon}.$$

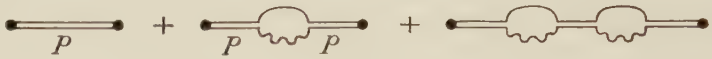
Pour le modèle F, les lignes de particule **V** disparaissent tandis que la règle *b*) est remplacée par la suivante :

b')

$$\longrightarrow -\mathbf{i}\,\lambda(2\pi)^4 f(\omega_k) f(\omega_{k'}) \delta^{(4)}(q + k - q' - k') .$$

Dans le modèle de Lee le propagateur habillé de la particule **V** est donné par la somme des diagrammes

(I.28)

$S'_1(p) =$ 

Cette somme fournit l'expression

$$S'_1(p) = \frac{S(p)}{1 - S(p)\,\Sigma(p)} = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0 - m_{\mathbf{V}} + \mathbf{i}\varepsilon - [\mathbf{i}/(2\pi)^4]\,\Sigma(p)} , \tag{I.29}$$

où $\Sigma(p)$ désigne la valeur de la boucle de self-énergie corrigée par la renormalisation de masse

$$\Sigma(p) = \mathbf{i}\,(2\pi)^4\,\delta m_{\mathbf{V}} - (2\pi)^8 g_0^2 \int \mathrm{d}^4k\, f^2(\omega_k)\, s(p - k)\, \hat{\Delta}(k) .$$

En introduisant la fonction de variable complexe

$$\sigma(z) = \int_\mu^\infty \mathrm{d}\omega \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{\omega - z} , \tag{I.30}$$

on obtient

$$-\frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\Sigma(p) = \delta m_{\mathbf{V}} + \frac{g_0^2}{4\pi^2}\,\sigma^+(p_0 - m_{\mathbf{N}}) .$$

On fait réapparaître le pôle $m_{\mathbf{V}}$ du propagateur en choisissant $\delta m_{\mathbf{V}}$ de sorte que $\Sigma(m_{\mathbf{V}}) = 0$; la constante de renormalisation Z est alors le résidu au pôle de la fonction $[(2\pi)^4/\mathbf{i}]\,S'_1(p)$ tandis que la constante de couplage observable est donnée par $g^2 = Z g_0^2$. On retrouve ainsi les formules (I.3) et (I.7) et l'on obtient finalement le propagateur renormalisé

$$S'(p) = S'_1(p)/Z$$

$$= \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{Z(p_0 - m_{\mathbf{V}} + \mathbf{i}\varepsilon) + \delta\nu + (g^2/4\pi^2)\,\sigma^+(p_0 - m_{\mathbf{N}})} \tag{I.31}$$

ou encore

$$S'(p) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_0 - m_{\mathbf{V}} + \mathbf{i}\varepsilon)\,\Phi^+(p_0 - m_{\mathbf{N}})} , \tag{I.32}$$

la fonction $\Phi(z)$ étant définie par (I.6) ou (I.18).

Hormis le terme sans diffusion $\delta(\vec{q}_\mathrm{i} - \vec{q}_\mathrm{f})\,\delta(\vec{k}_\mathrm{i} - \vec{k}_\mathrm{f})$, l'élément de la matrice **S** qui est donné par (I.8) se retrouve directement à l'aide du diagramme irréductible suivant

(I.33)

dans lequel le schéma représente le propagateur renormalisé.

La même diffusion est représentée dans le modèle F par le même terme $\delta(\vec{q}_i - \vec{q}_f)\ \delta(\vec{k}_i - \vec{k}_f)$ auquel s'ajoute la somme des diagrammes

(I.34)

La valeur de la boucle qui intervient dans ces diagrammes est égale, à un facteur près, à la valeur de la boucle non renormalisée du modèle de Lee. Si l'on omet les facteurs cinématiques des lignes externes, ainsi que la fonction $\delta^{(4)}$ qui exprime la conservation de l'impulsion-énergie totale, la somme des diagrammes (I.34) est donnée par l'expression suivante, où p désigne la quadriimpulsion totale entrante,

$$T'(p) = -(2\pi)^4\, \mathbf{i}\, \lambda / [1 - \Sigma'(p)] = -(2\pi)^4\, \mathbf{i}\, \lambda / \varphi^+(p_0 - m_{\mathbf{N}})\ ,$$

avec

$$\Sigma'(p) = -(\lambda/4\pi^2)\ \sigma^+(p_0 - m_{\mathbf{N}})\ .$$

La comparaison de cette expression à la matrice $\boldsymbol{S}$ déduite de (I.31) montre tout de suite que, quand Z tend vers 0, la matrice $\boldsymbol{S}$ du modèle de Lee tend vers celle du modèle F pourvu que $g^2/\delta\nu \to \lambda$. On est ainsi naturellement amené à considérer les limites, pour Z tendant vers 0, des diverses grandeurs attachées au modèle de Lee. Toutes ces limites s'entendent avec $m_{\mathbf{V}}$, $m_{\mathbf{N}}$ et μ fixés.

On peut, en premier lieu, définir la constante de couplage de la particule composée avec ses constituants par

$$g_1^2 = \lim_{Z\to 0} g^2 = 2\,(2\pi)^3\, C^2\ . \tag{I.35}$$

Cette définition coïncide bien avec la définition usuelle de la constante de couplage par le résidu au pôle de l'amplitude de diffusion.

On pose aussi

$$\delta\nu_1 = \lim_{Z\to 0} \delta\nu = -\frac{g_1^2}{4\pi^2}\, \sigma(m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}})\ , \tag{I.36}$$

ce qui permet d'écrire la relation d'identification (I.20) sous la forme

$$\lambda = g_1^2/\delta\nu_1\ . \tag{I.37}$$

Les définitions (I.35) et (I.36) serviront désormais à distinguer le modèle Y, pour lequel Z est différent de 0, du modèle F (ou modèle Y avec $Z = 0$), par les notations g, $\delta\nu$ ou g_1, $\delta\nu_1$ ([3]). En particulier, ce sont les grandeurs limites g_1 et $\delta\nu_1$ qui doivent figurer dans l'expression, déduite de (I.25) et (I.26), du champ quasi local $\hat{\Psi}_{\mathbf{V}}$.

La limite du propagateur (I.32) est enfin

$$S_1'(p) = \lim_{Z\to 0} S'(p) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{\delta\nu_1}\ \frac{1}{\varphi^+(p_0 - m_{\mathbf{N}})}\ . \tag{I.38}$$

Il résulte de ce qui précède que cette fonction est aussi donnée par la somme des chaînes (I.34), à un facteur près qui est tel que le résidu de $[(2\pi)^4/\mathbf{i}]\ S_1'(p)$, au pôle de l'état lié, ait pour valeur 1.

Cette propriété nous permet d'adopter, comme définition du propagateur de la particule **V** composée, le propagateur limite $S_1'(p)$. En effet, tant que la particule **V**

([3]) Notons, qu'avec les définitions (I.35) et (I.36), les formules (I.7) donnent, pour $Z \neq 0$,
$g^2 = (1 - Z)\ g_1^2$, $\delta\nu = (1 - Z)\ \delta\nu_1$.

n'intervient ni dans l'état initial ni dans l'état final, nous pouvons faire correspondre à tout diagramme irréductible du modèle de Lee, la somme de diagrammes du modèle F, qui s'en déduit en remplaçant par une série de chaînes le propagateur renormalisé $S'(p)$, associé à chaque ligne de particule **V**. Cette opération permet de représenter les amplitudes de diffusion du modèle F par les diagrammes irréductibles du modèle Y. Le calcul de ces diagrammes est alors soumis à des règles identiques à celles du modèle Y, le propagateur S' et la constante de couplage g étant simplement remplacés par les quantités limites S'_1 et g_1. Ce résultat sera étendu, au paragraphe IV.1, aux cas où la particule composée appartient à l'état initial ou à l'état final.

Mais nous allons développer d'abord, dans le second chapitre, les conséquences de la définition qui vient d'être posée.

II. Le propagateur de la particule composée

Au paragraphe I.4, la théorie des perturbations nous a permis de reconnaître une parenté entre les structures des modèles F et Y. Pour chacun de ces modèles on peut associer à la particule **V** un propagateur qui est, selon le cas, donné par la fonction S' ou $S'_1 = \lim_{Z\to 0} S'$.

Ce résultat indique que c'est par les propriétés particulières de ces fonctions que vont pouvoir se distinguer la particule élémentaire et la particule composée.

Ce chapitre est destiné à l'étude de ces propagateurs et, notamment, à la recherche des différences de caractère observable que ceux-ci peuvent présenter. Parmi ces propriétés distinctives, la plus immédiate concerne le comportement asymptotique.

1. **Comportement asymptotique.** — La fonction (I.38) qui a été adoptée comme propagateur de la particule **V** composée vérifie toutes les propriétés analytiques que l'on peut attendre d'un propagateur. Comme le propagateur (I.32) de la particule **V** élémentaire, elle possède une coupure sur la demi-droite $[m_{\mathbf{N}} + \mu, \infty[$ et un pôle à la masse physique $m_{\mathbf{V}}$ dont le résidu est égal à 1. Ces deux fonctions diffèrent toutefois dans leur comportement asymptotique comme on le voit sur les formules (I.32) et (I.38) ; on a les propriétés

$$(\text{II}.1) \qquad S'(p) \underset{|p_0|\to\infty}{\sim} \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{Z\, p_0}, \qquad S'_1(p) \underset{|p_0|\to\infty}{\to} \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\delta\nu_1}.$$

Le propagateur de la particule élémentaire tend vers 0 comme $1/p_0$ tandis que celui de la particule composée tend vers une constante.

Malgré cette différence, la propriété de la limite $S' \underset{Z\to 0}{\to} S'_1$ se comprend graphiquement très bien ; en effet, les dénominateurs des fonctions (I.32) et (I.38) peuvent respectivement s'écrire

$$(\text{II}.2) \qquad \begin{aligned} & Z\,(p_0 - m_{\mathbf{V}}) + \\ & + \frac{g^2}{4\pi^2}(p_0 - m_{\mathbf{V}}) + \int_\mu^\infty \mathrm{d}\omega \, \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,(\omega + m_{\mathbf{N}} - p_0 - \mathbf{i}\,\varepsilon)}, \end{aligned}$$

$$\text{(II.3)} \qquad \frac{g_1^2}{4\pi^2}(p_0 - m_{\mathbf{V}}) \int_{\mu}^{\infty} d\omega \, \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})(\omega + m_{\mathbf{N}} - p_0 - i\varepsilon)}.$$

Au facteur $g^2 g_1^2$ près les parties imaginaires de (II.2) et (II.3) sont égales tandis que les parties réelles diffèrent de $Z(p_0 - m_{\mathbf{V}})$. La forme des parties réelle et imaginaire de l'expression (II.3) est en général représentée par la figure 2. On en déduit, pour le propagateur de la particule composée, la forme représentée par la figure 3.

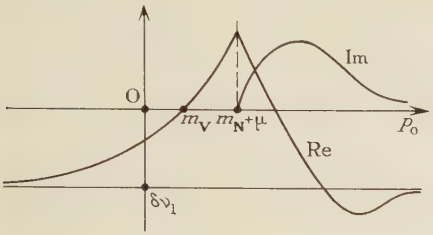


Fig. 2.

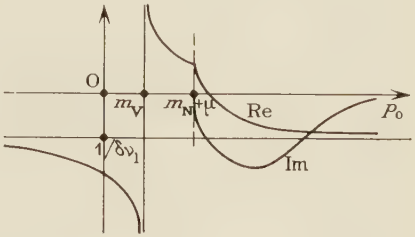


Fig. 3. — En ordonnée, $\left[(2\pi)^4/i\right] S_1'(p_0)$.

La partie réelle de l'expression (II.2) se déduit de la courbe de la figure 2 par addition du terme linéaire $Z(p_0 - m_{\mathbf{V}})$; on voit que pour une valeur assez petite de Z la somme de ces deux dernières fonctions est représentée par une courbe, qui coupe l'axe réel en deux points dont le second α s'éloigne indéfiniment quand Z tend vers 0 (fig. 4).

On obtient ainsi pour la partie réelle du propagateur S' la courbe en trait plein de la figure 5 où, quand Z tend vers 0, le point α tend vers $+\infty$. On voit clairement sur la figure 5 le mécanisme du passage à la limite.

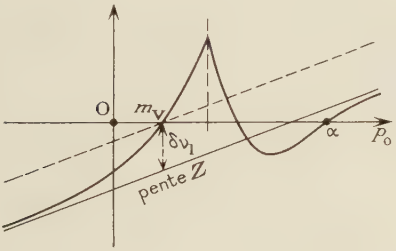


Fig. 4.

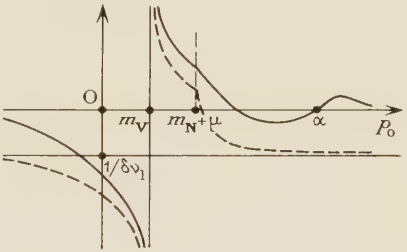


Fig. 5. — En ordonnée, $\left[(2\pi)^4/i\right] S'(p_0)$; en tirets, courbe limite.

Mais une particularité est liée au comportement asymptotique de S_1'. En effet, dans le cas où la particule **V** est élémentaire, son propagateur possède bien les propriétés asymptotiques que, d'une façon générale, on peut déduire de l'existence d'un champ local ; dans le cas d'un méson scalaire relativiste, par exemple, on déduit immédiatement de la formule spectrale de Lehmann [7] que l'on a

$$S'(p^2) = \int da \, \frac{\rho(a)}{p^2 - a + i\varepsilon} \sim \frac{1}{p^2} \int da \, \rho(a) = \frac{1}{Z p^2}.$$

Cette propriété n'est plus vraie pour la particule composée et l'on peut se demander

ce que devient la formule spectrale et, en particulier, le lien entre celle-ci et le champ de la particule **V** qui est alors un champ quasi local. Au paragraphe suivant nous allons établir et étudier les formules spectrales des deux propagateurs S' et S'_1.

2. **Représentations spectrales.** — *1. Fonction spectrale du modèle* Y. — Le propagateur renormalisé de la particule **V** peut être défini à partir du champ de Heisenberg $\Psi_{\mathbf{V}}(x)$ par la formule

$$S'(x-y) = \langle\, 0 \mid T\big(\Psi_{\mathbf{V}}(x)\, \Psi^{+}_{\mathbf{V}}(y)\big) \mid 0 \,\rangle\,, \tag{II.4}$$

où $\mid 0 \,\rangle$ représente le vide physique, identique ici au vide des champs nus.

Pour $x_0 > y_0$ on peut écrire, en introduisant un système complet d'états propres des opérateurs d'énergie et d'impulsion,

$$S'(x-y) = \langle\, 0 \mid \Psi_{\mathbf{V}}(x)\, \Psi^{+}_{\mathbf{V}}(y) \mid 0 \,\rangle = \sum_z \langle\, 0 \mid \Psi_{\mathbf{V}}(x) \mid z \,\rangle \langle\, z \mid \Psi^{+}_{\mathbf{V}}(y) \mid 0 \,\rangle\,.$$

En utilisant la formule suivante, valable pour toute grandeur $F(x)$ de la représentation de Heisenberg,

$$\langle\, z \mid F(x) \mid z' \,\rangle = \langle\, z \mid F(0) \mid z' \,\rangle \exp\big[-\mathbf{i}\,(p_{z'} - p_z)\, x\big]\,, \tag{II.5}$$

on obtient

$$S'(x-y) = \sum_z \big|\langle\, 0 \mid \Psi_{\mathbf{V}}(0) \mid z \,\rangle\big|^2 \exp\big[-\mathbf{i}\, p_z (x-y)\big]\,, \quad x_0 > y_0\,. \tag{II.6}$$

La somme sur les états peut s'écrire sous la forme

$$\sum_z = \int \mathrm{d}^4 P \sum_z \delta^{(4)}(P - p_z)\,.$$

On pose

$$\rho(P) = (2\pi)^3 \sum_z \big|\langle\, 0 \mid \Psi_{\mathbf{V}}(0) \mid z \,\rangle\big|^2\, \delta^{(4)}(P - p_z) \tag{II.7}$$

et la formule (II.6) s'écrit

$$S'(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^4 P\, \rho(P) \exp\big[-\mathbf{i}\, P\,(x-y)\big]\,, \quad x_0 > y_0\,. \tag{II.8}$$

Les états propres qui interviennent dans la formule (II.7) sont ceux du secteur $\mathbf{V} \rightleftarrows \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}$, qui sont donnés par (I.5). La formule (II.7) se réduit donc à

$$\rho(P) = (2\pi)^3 \int \mathrm{d}\vec{p}\, \big|\langle\, 0 \mid \Psi_{\mathbf{V}}(0) \mid \mathbf{V}^{\rightarrow}_{\vec{p}} \,\rangle\big|^2\, \delta(\vec{P} - \vec{p})\, \delta(P_0 - m_{\mathbf{V}}) + \tag{II.9}$$

$$+ (2\pi)^3 \int \mathrm{d}\vec{q}\, \mathrm{d}\vec{k}\, \big|\langle\, 0 \mid \Psi_{\mathbf{V}}(0) \mid \mathbf{N}^{\rightarrow}_{\vec{q}}\, \boldsymbol{\theta}^{\rightarrow}_{\vec{k}} \,\rangle^{\pm}\big|^2\, \delta(\vec{P} - \vec{q} - \vec{k})\, \delta(P_0 - m_{\mathbf{N}} - \omega_k)\,.$$

Puisque la représentation de Heisenberg coïncide avec la représentation interaction au temps 0, on a, d'après (I.23),

$$\Psi_{\mathbf{V}}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}\vec{p}\; b_{\mathbf{V}}(\vec{p})\,.$$

On déduit alors de (II.9) et de (I.5)

$$\rho(P) = \rho(P_0) = \delta(P_0 - m_{\mathbf{V}}) + \frac{g^2}{4\pi^2}\, \frac{f^2(P_0 - m_{\mathbf{N}})\, \sqrt{(P_0 - m_{\mathbf{N}})^2 - \mu^2}}{(P_0 - m_{\mathbf{V}})^2\, \big|\Phi^{+}(P_0 - m_{\mathbf{N}})\big|^2}\,.$$

La définition (I.18) de $\Phi(z)$ entraîne la formule

$$\Phi^{+}(\omega) - \Phi^{-}(\omega) = 2\pi\,\mathbf{i}\, \frac{g^2}{4\pi^2}\, \frac{f^2(\omega)\, \sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}}$$

et conduit finalement à l'expression

$$\rho(a) = \delta(a - m_{\mathbf{V}}) - \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}}\,\frac{1}{a - m_{\mathbf{V}}}\left[\frac{1}{\Phi^{+}(a - m_{\mathbf{N}})} - \frac{1}{\Phi^{-}(a - m_{\mathbf{N}})}\right]. \tag{II.10}$$

On voit d'autre part que pour $x_0 < y_0$ le propagateur (II.4) est nul ; on a donc au total, en combinant avec (II.8),

$$S'(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4P\;\rho(P_0)\;\theta(x_0 - y_0)\;\exp\left[-\mathbf{i}\;P\;(x - y)\right]$$

ou encore, en intégrant sur $\mathrm{d}\vec{P}$,

$$S'(x - y) = \int \mathrm{d}a\;\rho(a)\;\theta(x_0 - y_0)\;\exp\left[-\mathbf{i}\;a\;(x_0 - y_0)\right]\;\delta(\vec{x} - \vec{y})\,. \tag{II.11}$$

On retrouve sous l'intégrale le propagateur nu

$$\theta(x_0 - y_0)\;\exp\left[-\mathbf{i}\;a\;(x_0 - y_0)\right]\;\delta(\vec{x} - \vec{y})$$

d'une particule **V** de masse a. En passant à la transformée de Fourier, que l'on définit par

$$S'(x) = \int \mathrm{d}^4p\;\exp(-\mathbf{i}\;p\;x)\;S'(p)\,, \tag{II.12}$$

on obtient la formule spectrale de Lehmann

$$S'(p) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}a\;\frac{\rho(a)}{p_0 - a + \mathbf{i}\,\varepsilon}\,. \tag{II.13}$$

On peut vérifier directement que l'intégrale précédente redonne bien le propagateur déjà défini par (I.32). On a en effet, à l'aide de (II.10),

$$\int \mathrm{d}a\;\frac{\rho(a)}{p_0 - a + \mathbf{i}\,\varepsilon} = \frac{1}{p_0 - m_{\mathbf{V}} + \mathbf{i}\,\varepsilon} - \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}}\int \frac{\mathrm{d}a}{a - m_{\mathbf{V}}}\,\frac{1}{p_0 - a + \mathbf{i}\,\varepsilon}\left[\frac{1}{\Phi^{+}(a - m_{\mathbf{N}})} - \frac{1}{\Phi^{-}(a - m_{\mathbf{N}})}\right].$$

L'intégrale qui figure au second membre se calcule facilement en intégrant la fonction $\left[(z - m_{\mathbf{V}})\,(p_0 - z + \mathbf{i}\,\varepsilon)\,\Phi(z - m_{\mathbf{N}})\right]^{-1}$ le long du contour $\mathcal{C}$ de la figure 6 ; l'intégrale sur la grande circonférence tend vers 0 puisque $\Phi(z) \underset{|z|\to\infty}{\to} Z \neq 0$ et l'on retrouve l'expression (I.32).

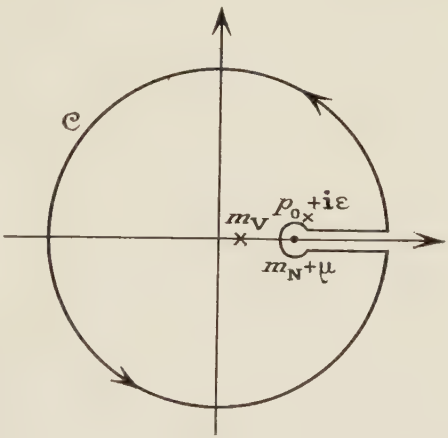


FIG. 6.

2. Fonction spectrale du modèle F. — Nous envisageons maintenant le cas où la particule **V** est composée. Le champ $\Psi_{\mathbf{V}}$ du paragraphe précédent est remplacé par le champ quasi local $\widehat{\Psi}_{\mathbf{V}}$ qui a été défini par les formules (I.25) et (I.26). Avec les définitions (I.35) et (I.36), ces formules donnent l'expression

$$\widehat{\Psi}_{\mathbf{V}}(x) = \frac{1}{\delta_{\nu_1}}\,j_1(x)\,, \tag{II.14}$$

où la notation j_1 signifie que la constante de couplage à faire figurer dans (I.25) est la constante limite g_1. La valeur moyenne (II.4) est donc remplacée par

$$J_1(x-y) = \frac{1}{\delta\nu_1^2} \langle 0 \,|\, T(j_1(x)\, j_1^+(y)) \,|\, 0 \rangle \tag{II.15}$$

et son calcul se conduit de manière analogue.

On a, au lieu de (II.13),

$$J_1(p) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}a \, \frac{\rho_1(a)}{p_0 - a + \mathbf{i}\,\varepsilon}\,, \tag{II.16}$$

où $\rho_1(a)$ s'exprime par une formule semblable à (II.7) dans laquelle $(1/\delta\nu_1)\, j_1(0)$ remplace $\Psi_{\mathbf{V}}(0)$. On a, d'après (I.23) et (I.25),

$$\frac{1}{\delta\nu_1} j_1(0) = -\frac{g_1}{\delta\nu_1} \Psi_{\mathbf{N}}(0) \int \mathrm{d}\vec{x}'\, f(-\vec{x}')\, A(\vec{x}', 0)$$

$$= -\frac{g_1}{\delta\nu_1} \frac{1}{\sqrt{2}\,(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\vec{q}\, b_{\mathbf{N}}(\vec{q}) \int \mathrm{d}\vec{k}\, \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\, a(\vec{k})\,.$$

En reportant cette expression dans (II.9) et en utilisant les expressions (I.9) et (I.13) des états propres, on obtient, après quelques calculs,

$$\rho_1(a) = \delta(a - m_{\mathbf{V}}) - \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}} \frac{1}{\delta\nu_1} \left[\frac{1}{\varphi^+(a - m_{\mathbf{N}})} - \frac{1}{\varphi^-(a - m_{\mathbf{N}})} \right]. \tag{II.17}$$

Il résulte des expressions (I.32) et (I.38) des deux propagateurs que la fonction ainsi obtenue est la limite, quand Z tend vers 0, de la fonction spectrale $\rho(a)$ du modèle de Lee.

Mais, comme le montre un calcul direct, la fonction $J_1(p)$ ne représente plus le propagateur de la particule composée. L'intégrale au second membre de (II.16) s'écrit, à l'aide de (II.17),

$$\frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{p_0 - m_{\mathbf{V}} + \mathbf{i}\,\varepsilon} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}} \frac{1}{\delta\nu_1} \int_{m_{\mathbf{N}}+\mu}^{\infty} \frac{\mathrm{d}a}{p_0 - a + \mathbf{i}\,\varepsilon} \left[\frac{1}{\varphi^+(a - m_{\mathbf{N}})} - \frac{1}{\varphi^-(a - m_{\mathbf{N}})} \right] \right].$$

La dernière intégrale peut être évaluée en intégrant la fonction

$$\left[(p_0 - z + \mathbf{i}\,\varepsilon)\, \varphi(z - m_{\mathbf{N}})\right]^{-1}$$

le long du contour de la figure 6 ; on obtient, par application du théorème des résidus,

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{p_0 - z + \mathbf{i}\,\varepsilon} \frac{1}{\varphi(z - m_{\mathbf{N}})} = \int_{m_{\mathbf{N}}+\mu}^{\infty} \frac{\mathrm{d}a}{p_0 - a + \mathbf{i}\,\varepsilon} \left[\frac{1}{\varphi^+(a - m_{\mathbf{N}})} - \frac{1}{\varphi^-(a - m_{\mathbf{N}})} \right] +$$

$$+ \int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{d}z}{p_0 - z + \mathbf{i}\,\varepsilon} \frac{1}{\varphi(z - m_{\mathbf{N}})} = 2\pi\,\mathbf{i} \left[\frac{-1}{\varphi^+(p_0 - m_{\mathbf{N}})} + \frac{\delta\nu_1}{p_0 - m_{\mathbf{V}} + \mathbf{i}\,\varepsilon} \right].$$

Au contraire de ce qui se passe pour le modèle de Lee, l'intégrale sur la grande circonférence tend maintenant vers $-2\pi\,\mathbf{i}$ et non plus vers 0 puisque la fonction $\varphi(z)$ tend asymptotiquement vers 1 ; on a donc

$$J_1(p) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\delta\nu_1} \frac{1}{\varphi^+(p_0 - m_{\mathbf{N}})} - \frac{1}{\delta\nu_1} \right].$$

Avec l'expression (I.38) du propagateur de la particule composée il s'ensuit la formule

$$S'_1(p) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{\delta\nu_1} + \int da\,\frac{\rho_1(a)}{p_0 - a + \mathbf{i}\,\varepsilon}\right]. \tag{II.18}$$

Cette fonction étant la limite du propagateur S', la comparaison des formules (II.13) et (II.18) montre que le passage à la limite sous le signe $\int$ dans (II.18) n'est pas valable ; ceci est dû au fait que le propagateur limite tend vers une constante à l'infini alors qu'une formule telle que (II.13) ne peut représenter qu'une fonction qui s'annule asymptotiquement. Ce résultat peut également se comprendre à l'aide de la théorie des perturbations si l'on considère le développement en diagrammes de la valeur moyenne (II.15) ; il résulte, en effet, de l'expression (I.25) du courant j_1, que la série de diagrammes que l'on obtient est identique au développement (I.34) du propagateur de la particule composée privé de son premier terme.

Remarque. — Il est facile d'évaluer la valeur moyenne qui correspond à (II.15) dans le modèle de Lee. Plutôt que de faire un calcul direct nous utiliserons l'équation de mouvement du champ $\Psi_{\mathbf{V}}(x)$; elle se déduit des équations (I.21) et (I.23) et s'écrit

$$\left[Z\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial t} - m_{\mathbf{V}}\right) + \delta\nu\right]\Psi_{\mathbf{V}}(x) = j(x)\,, \tag{II.19}$$

où le courant $j(x)$ est défini par (I.25). On en tire immédiatement, en utilisant la formule (II.5),

$$\left[Z\,(p_{0(z)} - m_{\mathbf{V}}) + \delta\nu\right]\langle\, 0\,|\Psi_{\mathbf{V}}(0)|\,z\,\rangle = \langle\, 0\,|j(0)|\,z\,\rangle$$

et par suite, à l'aide de (II.7),

$$(2\pi)^3 \sum_z \left|\langle\, 0\,|\,j(0)\,|\,z\,\rangle\right|^2 \delta^{(4)}(P - p_z) = \left[Z\,(P_0 - m_{\mathbf{V}}) + \delta\nu\right]^2 \rho(P_0)\,.$$

On en déduit, pour la transformée de Fourier de la valeur moyenne

$$J(x - y) = \frac{1}{\delta\nu^2}\langle\, 0\,|\,T\big(j(x)\,j^{+}(y)\big)|\,0\,\rangle\,, \tag{II.20}$$

la représentation spectrale suivante :

$$J(p) = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\int da\left[1 + \frac{Z}{\delta\nu}\,(a - m_{\mathbf{V}})\right]^2 \frac{\rho(a)}{p_0 - a + \mathbf{i}\,\varepsilon}\,. \tag{II.21}$$

On voit sur (II.16) et (II.21) que, contrairement au cas des formules (II.13) et (II.18), le passage à la limite sous le signe $\int$ dans (II.21) est valable. Une explication physique de ces propriétés sera obtenue au paragraphe II.3.*2* par l'étude de la structure de l'amplitude de diffusion.

3. Propriétés des fonctions spectrales. — Les deux fonctions spectrales ρ et ρ_1 qui viennent d'être introduites sont étroitement reliées l'une à l'autre par le passage à la limite $Z \to 0$. Elles se manifestent, chacune pour le modèle auquel elle correspond, dans les formules qui, bien que jouant des rôles analogues, présentent certaines différences et notamment, comme il vient d'être montré, pour la représentation du propagateur.

Dans le modèle Y la fonction $\rho(a)$ permet la détermination des constantes de renormalisation et, en particulier, de la constante Z ; d'après une formule de Lehmann, que l'on peut vérifier explicitement ici, on a

$$\frac{1}{Z} = \int da\, \rho(a) . \qquad \text{(II.22)}$$

Cette équation indique que l'intégrale de $\rho(a)$ doit tendre vers $+\infty$ quand Z tend vers 0. Mais cela n'entraîne pas nécessairement la divergence de l'intégrale $\int da\, \rho_1(a)$. On a en effet, d'après (II.17) et (I.10),

$$\rho_1(a) = \delta(a - m_V) + \frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{f^2(a - m_N)\sqrt{(a - m_N)^2 - \mu^2}}{\delta\nu_1 |\varphi^+(a - m_N)|^2}$$

et l'intégrale de la fonction spectrale limite peut converger si la fonction de coupure $f(\omega)$ décroît suffisamment vite à l'infini.

Plus généralement, il est évident que l'analyticité seule ne peut entraîner de relation entre les comportements asymptotiques des parties réelle et imaginaire d'une amplitude de diffusion [8]. C'est ici le cas du propagateur (II.18) pour lequel la présence de la constante $1/\delta\nu_1$ est indépendante de la convergence de l'intégrale de la fonction spectrale.

Remarque I. — Notons cependant que les formes soustraites de l'équation (II.18) sont identiques à celles que l'on obtient pour une particule élémentaire, puisque la constante $1/\delta\nu_1$ disparaît par soustraction ; en désignant par b le point de soustraction, on a dans les deux cas

$$S'(p) = S'(b) + \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}(p_0 - b) \int da \frac{\rho(a)}{(a - b)(p_0 - a + \mathbf{i}\varepsilon)} .$$

Le comportement, pour $Z \to 0$, de l'intégrale de la fonction spectrale $\rho(a)$ s'explique physiquement d'une façon simple : si l'on écrit l'expression (II.2), dont la partie réelle est représentée sur la figure 4, sous la forme $\mathcal{R}(p_0) + \mathbf{i}\,\mathcal{I}(p_0)$ on obtient, d'après (II.10),

$$\rho(a) = \delta(a - m_V) + \bar{\rho}(a) , \qquad \text{(II.23)}$$

avec

$$\bar{\rho}(a) = \frac{1}{\pi} \frac{\mathcal{I}(a)}{\mathcal{R}^2(a) + \mathcal{I}^2(a)} . \qquad \text{(II.24)}$$

Au voisinage du point α représenté sur la figure 4, la fonction $\bar{\rho}(a)$ présente un maximum de hauteur $1/\pi\, \mathcal{I}(\alpha)$ qui tend vers $+\infty$ quand $\alpha \to \infty$, ceci d'autant plus vite que la fonction de coupure est plus rapidement décroissante puisque l'on a $\mathcal{I}(\alpha) \sim (g^2/4\pi)\, \alpha\, f^2(\alpha - m_N)$. [La fonction $f^2(\omega)$ doit décroître au moins comme $1/\omega$ si l'on veut que l'intégrale (I.7) qui définit δv converge.] La demi-largeur de ce pic s'obtient en considérant le point où l'on a $\mathcal{R}(p_0) = \mathcal{I}(\alpha)$; la fonction $\mathcal{R}(p_0)$ [fig. 4] est sensiblement linéaire au voisinage du point α avec une pente voisine de Z ; la demi-largeur est donc approximativement égale à $\mathcal{I}(\alpha)/Z$ de sorte que l'aire comprise sous le maximum est de l'ordre de $1/Z$.

Ce phénomène est naturellement sans rapport avec la convergence ou la divergence de l'intégrale de la fonction limite $\rho_1(a)$. Cette intégrale ne représente évi-

demment plus l'inverse d'une constante de renormalisation mais elle est encore reliée, comme dans le cas du modèle Y, à l'anticommutateur construit avec le champ de la particule **V**. En effet, si l'on remplace dans les valeurs moyennes (II.4) et (II.15) le produit chronologique par l'anticommutateur on aboutit, en vertu des règles de sélection des modèles, à une intégrale analogue à celle de la formule (II.8) valable pour toute valeur des temps x_0 et y_0. En intégrant sur $d\vec{P}$ on obtient, pour chacun des deux modèles, les formules analogues suivantes

$$\begin{aligned} &\langle 0 \mid \{ \Psi_{\mathbf{V}}(x), \Psi^{+}_{\mathbf{V}}(y) \} \mid 0 \rangle_{x_0=y_0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \int da\, \rho(a)\,, \\ &\langle 0 \mid \{ \widehat{\Psi}_{\mathbf{V}}(x), \widehat{\Psi}^{+}_{\mathbf{V}}(y) \} \mid 0 \rangle_{x_0=y_0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \int da\, \rho_1(a)\,. \end{aligned} \tag{II.25}$$

L'intégrale qui figure dans la deuxième formule (II.25) s'évalue facilement ; on obtient, à l'aide de (II.17) et d'une intégration le long du contour de la figure 6, la formule

$$\int da\, \rho_1(a) = \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}} \frac{1}{\delta\nu_1} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{\varphi(z - m_{\mathbf{N}})}\,.$$

Avec la formule (I.10) on obtient (4), à des infiniment petits inférieurs à $1/z$ près,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(z - m_{\mathbf{N}})} &\sim 1 - \frac{\lambda}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} d\omega\, \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{\omega + m_{\mathbf{N}} - z} \\ &\sim 1 + \frac{\lambda}{4\pi^2 z} \int_{\mu}^{\infty} d\omega\, f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\,. \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt

$$\int da\, \rho_1(a) = \left(\frac{g_1}{2\pi\,\delta\nu_1}\right)^2 \int_{\mu}^{\infty} d\omega\, f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\,. \tag{II.26}$$

Ce résultat est identique à celui que l'on obtiendrait en calculant directement l'anticommutateur du champ $\widehat{\Psi}_{\mathbf{V}}$ [4].

Remarque II. — Il semble que la deuxième relation (II.25) fasse jouer au champ $\widehat{\Psi}_{\mathbf{V}}$ un rôle privilégié par rapport aux autres champs quasi locaux que l'on peut construire pour représenter la particule **V** composée. Considérons, par exemple, le champ quasi local $B(x)$ qui crée, à partir du vide, l'état lié $\mid \mathbf{V}'_{\vec{p}} \rangle$; il se déduit de (I.13) et il est défini par

$$\left\{ \begin{aligned} B(\vec{p}, t) &= \frac{g_1}{4\pi^{3/2}} \int d\vec{q}\, d\vec{k}\, \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \times \\ &\qquad \times \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\,(\omega_k + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}\, b_{\mathbf{N}}(\vec{q}, t)\, a(\vec{k}, t)\,, \\ B(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}\, \exp(\mathbf{i}\,\vec{p}.\vec{x})\, B(\vec{p}, t)\,. \end{aligned} \right. \tag{II.27}$$

On a, en vertu de l'orthogonalité des états (I.9) et (I.13),

(4) On suppose la fonction de coupure telle que l'intégrale qui figure dans (I.10) ait un comportement asymptotique en $1/z$.

$$\langle 0 \,|B(0)|\, \mathbf{V}'^{\rightarrow}_{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}' \,\langle 0 \,|B(\vec{p}', 0)|\, \mathbf{V}'^{\rightarrow}_{p} \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}' \,\langle \mathbf{V}'^{\rightarrow}_{p'} \,|\, \mathbf{V}'^{\rightarrow}_{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} .$$

$$\langle 0 \,|B(0)|\, \mathbf{N}^{\rightarrow}_{q}\, \boldsymbol{\theta}^{\rightarrow}_{k} \rangle^{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p} \,\langle \mathbf{V}'^{\rightarrow}_{p} \,|\, \mathbf{N}^{\rightarrow}_{q}\, \boldsymbol{\theta}^{\rightarrow}_{k} \rangle^{\pm} = 0 .$$

Il en résulte par (II.9) que la fonction spectrale qui correspond au champ $B(x)$ se réduit au seul terme singulier $\delta(a - m_{\mathbf{V}})$. Plus généralement, on peut voir que le champ $\hat{\Psi}_{\mathbf{V}}$ est le seul qui fournisse par la formule (II.9) la fonction spectrale limite $\rho_1(a)$.

L'absence de relation entre la condition $Z = 0$ et la divergence de l'intégrale de $\rho_1(a)$ réduit les propriétés caractéristiques du propagateur limite S'_1 à la seule présence du terme constant $1/\delta\nu_1$ dans la formule (II.18). Nous avons vu que ce terme correspond au premier diagramme du développement (I.34) de S'_1 ; il tire évidemment son origine de l'existence d'un couplage fondamental à quatre particules. Nous allons voir que cette circonstance vient jouer un rôle dans l'établissement même des relations de dispersion par son intervention dans le commutateur à temps égaux.

3. **Relation de dispersion pour la diffusion élastique N θ.** — La structure analytique de l'amplitude de diffusion élastique **N θ** peut être établie par les méthodes classiques des relations de dispersion sans qu'il y ait lieu de faire d'hypothèse sur la nature élémentaire ou composée de la particule **V**. Cette indifférence des propriétés analytiques vis-à-vis de la nature des particules est tout à fait générale et, si l'on met à part la condition de causalité, résulte seulement de la possibilité d'associer à chaque particule un champ local ou quasi local, qui vérifie la condition asymptotique. Mais il faut remarquer qu'il n'est possible d'obtenir ainsi que le domaine d'analyticité des amplitudes tandis que les comportements asymptotiques demeurent inconnus. Ceux-ci sont le plus souvent postulés de façon à rendre compte des résultats expérimentaux. C'est pourquoi l'on néglige généralement le commutateur (ou anticommutateur) à temps égaux, que la méthode habituelle des contractions fait apparaître, puisque celui-ci n'apporte aucune modification au domaine d'analyticité ; la contribution de ce commutateur est alors automatiquement incluse dans les termes qui rendent compte du comportement asymptotique, en particulier dans les polynômes qui apparaissent lors des soustractions.

Dans le cas présent de la diffusion **N θ**, nous allons montrer que le caractère composé ou élémentaire de la particule **V** se manifeste, indépendamment de toute question de soustraction, par la présence ou l'absence du commutateur à temps égaux. De plus, si la relation de dispersion est valable sans soustraction (5), le terme que ce commutateur apporte à l'amplitude détermine le comportement asymptotique de celle-ci et fournit une distinction théorique entre le cas où la

(5) Avec les hypothèses faites sur la fonction de coupure, cette propriété est toujours réalisée pour le modèle de Lee.

particule **V** est élémentaire et celui où elle est composée. Cela nous amènera à discuter de la possibilité d'utiliser cette relation de dispersion comme test d'élémentarité de la particule **V**.

1. Etablissement de la relation de dispersion. — On désigne par $\vec{q}$, $\vec{k}$ les impulsions respectives du fermion et du boson entrants, par $\vec{q'}$, $\vec{k'}$ les impulsions des particules sortantes. L'élément de matrice **S** s'écrit

$$S_{fi} = {}^{-}\langle\, \mathbf{N}_{\vec{q}'}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid \mathbf{N}_{\vec{q}}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle^{+}. \tag{II.28}$$

Nous effectuerons sa réduction en contractant les opérateurs de fermion ; le courant associé à la particule **N** est défini par

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial t} - m_{\mathbf{N}}\right)\Psi_{\mathbf{N}}(x) = j_{\mathbf{N}}(x)\,, \tag{II.29}$$

tandis que la condition asymptotique pour cette particule s'écrit

$$b^{\mathrm{f}}_{\mathbf{N}\ \substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}} = \lim_{t\to\mp\infty} \int \mathrm{d}\vec{x}\, f^{*}(x)\, \Psi_{\mathbf{N}}(x)\,, \tag{II.30}$$

où $f(x)$ désigne une solution de l'équation libre.

La contraction de l'opérateur $b^{+}_{\mathrm{in}}(\vec{q})$ effectuée dans (II.28) donne

$$S_{fi} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}\vec{x} \exp\left[\mathbf{i}\,(\vec{q}.\vec{x} - m_{\mathbf{N}}\, t)\right] {}^{-}\langle\, \mathbf{N}_{\vec{q}'}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid \Psi^{+}_{\mathbf{N}}(x) \mid \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle$$

et, par une transformation classique,

$$S_{fi} - \delta_{fi} = \frac{-\mathbf{i}}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^4x \exp\left[\mathbf{i}\,(\vec{q}.\vec{x} - m_{\mathbf{N}}\, t)\right] {}^{-}\langle\, \mathbf{N}_{\vec{q}'}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid j^{+}_{\mathbf{N}}(x) \mid \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle\,, \tag{II.31}$$

L'élément de matrice qui intervient dans (II.31) est traité de manière analogue ; on a d'abord

$$\begin{aligned} &{}^{-}\langle\, \mathbf{N}_{\vec{q}'}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid j^{+}_{\mathbf{N}}(x) \mid \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle = \\ &\quad = \lim_{t'\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}\vec{x}' \exp\left[-\mathbf{i}\,(\vec{q}'.\vec{x}' - m_{\mathbf{N}}\, t')\right] \langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid \Psi_{\mathbf{N}}(x')\, j^{+}_{\mathbf{N}}(x) \mid \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle. \end{aligned}$$

Le produit $\Psi_{\mathbf{N}}\, j^{+}_{\mathbf{N}}$ peut être remplacé par un produit T et l'on obtient successivement

$$\begin{aligned} &{}^{-}\langle\, \mathbf{N}_{\vec{q}'}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid j^{+}_{\mathbf{N}}(x) \mid \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle = \qquad \text{(II.32)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^4x' \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \exp\left[-\mathbf{i}\,(\vec{q}'.\vec{x}' - m_{\mathbf{N}}\, t')\right] \langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid T\big(\Psi_{\mathbf{N}}(x')\, j^{+}_{\mathbf{N}}(x)\big) \mid \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle \right\} \\ &= \frac{-\mathbf{i}}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^4x' \exp\left[-\mathbf{i}\,(\vec{q}'.\vec{x}' - m_{\mathbf{N}}\, t')\right] \times \\ &\qquad \times \left\{ \langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid T\big(j_{\mathbf{N}}(x')\, j^{+}_{\mathbf{N}}(x)\big) \mid \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle + \mathbf{i}\,\delta(t' - t) \langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \mid \left\{ {}^{\mathrm{I}}\Psi_{\mathbf{N}}(x'), j^{+}_{\mathbf{N}}(x) \right\} \mid \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Le produit T qui figure dans l'intégrale précédente peut indifféremment être remplacé par l'anticommutateur retardé ou même, en vertu des lois de conservation du modèle, par le simple produit $\theta(t' - t)\, j_{\mathbf{N}}\, j^{+}_{\mathbf{N}}$; de même l'anticommutateur à temps égaux peut être remplacé par $\delta(t' - t)\, \Psi_{\mathbf{N}}\, j^{+}_{\mathbf{N}}$.

Avec le mode de contraction adopté ici les propriétés analytiques du terme qui contient le produit T ne peuvent s'établir suivant la méthode classique car l'énergie totale dans le système au repos de la particule **θ** est indépendante de l'impulsion de la particule **N** ; dans ce système le domaine physique est donc rédui

à un point. Mais la formule (II.32) peut être transformée en utilisant l'expression explicite du courant $j_{\mathbf{N}}$; celui-ci est donné par la formule

$$j_{\mathbf{N}}(x) = -\,g\,a^{+}(x)\,\Psi_{\mathbf{V}}(x)\,, \tag{II.33}$$

où l'on a posé

$$a(\vec{x},t) = \int \mathrm{d}\vec{x}'\, f(\vec{x}-\vec{x}')\, A(\vec{x}',t) \tag{II.34}$$

et où g et $\Psi_{\mathbf{V}}$ sont à remplacer respectivement par g_1 et $\hat{\Psi}_{\mathbf{V}}$ dans le cas où la particule **V** est composée. On obtient, en utilisant l'invariance par translation,

$$\begin{aligned}\langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \,|\, T\big(j_{\mathbf{N}}(x')\, j^{+}_{\mathbf{N}}(x)\big)|\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle &= g\,\theta(t'-t)\,\langle\, \boldsymbol{\theta}_{k'} \,|a^{+}(x')\,\Psi_{\mathbf{V}}(x')\,\Psi^{+}_{\mathbf{V}}(x)\,a(x)|\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle \\ &= g^{2}\,\theta(t'-t)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k'x'}\,\langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \,|a^{+}(0)\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}Px'}\,\Psi_{\mathbf{V}}(x')\,\Psi^{+}_{\mathbf{V}}(x)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}Px}\,a(0)|\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}kx}\,.\end{aligned}$$

Il est possible de faire disparaître de cette dernière expression les opérateurs $a(0)$ et $a^{+}(0)$ car les états physiques de la particule $\boldsymbol{\theta}$ sont identiques aux états nus et l'on a

$$\begin{aligned}\langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \,|\, T\big(j_{\mathbf{N}}(x')\, j^{+}_{\mathbf{N}}(x)\big)\,|\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle &= \\ &= \frac{g^{2}}{2\,(2\,\pi)^{3}}\,\frac{f(\omega_k)\,f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_k\,\omega_{k'}}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}(k'x'-kx)}\,\theta(t'-t)\,\langle\, 0\,|\Psi_{\mathbf{V}}(x')\,\Psi^{+}_{\mathbf{V}}(x)|\,0\,\rangle\,.\end{aligned} \tag{II.35}$$

En rassemblant les formules (II.31), (II.32) et (II.35) on obtient pour la matrice **S** la forme suivante :

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{fi}} = \delta_{\mathrm{fi}} &- \frac{g^{2}}{2(2\,\pi)^{6}}\,\frac{f(\omega_k)\,f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_k\,\omega_{k'}}}\,\times \\ &\times \int \mathrm{d}^{4}x\,\mathrm{d}^{4}x'\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}(q+k)x}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}(q'+k')x'}\,\langle\, 0\,|\,T\big(\Psi_{\mathbf{V}}(x')\,\Psi^{+}_{\mathbf{V}}(x)\big)|\,0\,\rangle\,- \\ &- \frac{\mathbf{i}}{(2\,\pi)^{3}}\int \mathrm{d}^{4}x\,\mathrm{d}^{4}x'\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}qx}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}q'x'}\,\delta(t'-t)\,\langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \,|\Psi_{\mathbf{N}}(x')\,j^{+}_{\mathbf{N}}(x)|\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle\,.\end{aligned} \tag{II.36}$$

La somme des deux premiers termes de cette expression est de forme identique à ce que l'on obtiendrait pour une diffusion par l'intermédiaire d'une particule dont le propagateur tend vers 0 à haute énergie. Le dernier terme, qui provient de l'anticommutateur à temps égaux, s'annule quand la particule **V** est élémentaire puisqu'alors le courant $j^{+}_{\mathbf{N}}$ ne contient pas le champ de la particule **N**. Il n'en est plus de même si la particule **V** est composée ; dans ce cas le courant $j_{\mathbf{N}}$, qui est donné par les formules (II.33), (II.14) et (I.25), s'écrit

$$j_{\mathbf{N}}(x) = \frac{g_1^{2}}{\delta\nu_1}\,\Psi_{\mathbf{N}}(x)\,a^{+}(x)\,a(x)\,. \tag{II.37}$$

Il s'exprime maintenant en fonction du champ $\Psi_{\mathbf{N}}$ et l'anticommutateur à temps égaux n'est plus nul. Le dernier terme de (II.36) s'écrit

$$\begin{aligned}-\frac{\mathbf{i}}{(2\,\pi)^{3}}\,\frac{g_1^{2}}{\delta\nu_1}\int \mathrm{d}^{4}x\,\mathrm{d}^{4}x'\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}qx}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}q'x'}\,\delta^{(4)}(x-x')\,\langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \,|\, a^{+}(x)\,a(x)|\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle &= \\ = -\,2\,\pi\,\mathbf{i}\,\frac{g_1^{2}}{\delta\nu_1}\,\delta^{(4)}(q+k-q'-k')\,\langle\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}'} \,|a^{+}(0)\,a(0)|\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}} \,\rangle & \\ = -\,\frac{\mathbf{i}}{8\,\pi^{2}}\,\frac{g_1^{2}}{\delta\nu_1}\,\delta^{(4)}(q+k-q'-k')\,\frac{f(\omega_k)\,f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_k\,\omega_{k'}}}\,. &\end{aligned}$$

On voit immédiatement que cette expression correspond au terme constant du propagateur de la particule composée. Si l'on définit l'amplitude de transition M par la formule

$$(\text{II}.38)\quad S_{\text{fi}} = \delta_{\text{fi}} - \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}}\,\frac{f(\omega_k)\,f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_k\,\omega_{k'}}}\,\delta^{(4)}(q + k - q' - k')\,M(m_{\mathbf{N}} + \omega_k)\,,$$

on obtient, dans le système où la particule **N** est au repos, une relation de dispersion de la forme

$$(\text{II}.39)\qquad \text{Re}M(E) = K - \frac{g^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{E - m_{\mathbf{V}}} + \frac{1}{\pi}\,P\int_{m_{\mathbf{N}}+\mu}^{\infty} \text{d}E'\,\frac{\text{Im}M(E')}{E' - E}\,,$$

où la constante K n'est présente que si la particule **V** est composée et possède alors la valeur positive

$$(\text{II}.40)\qquad K = -g_1^2/4\pi\,\delta\nu_1\,.$$

La forme (II.39) de la relation de dispersion tient compte de ce qu'aucune soustraction n'est nécessaire pour assurer la convergence de l'intégrale. Grâce à cette propriété, on peut penser qu'à l'aide d'une détermination expérimentale des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffusion (6), la relation de dispersion (II.39) pourrait fournir un test permettant de décider de la nature élémentaire ou composée de la particule **V**. En effet, si l'on peut connaître exactement la valeur de l'intégrale qui figure au second membre de (II.39), il suffit de comparer celle-ci à la partie réelle de l'amplitude mesurée pour déterminer la valeur de la constante K.

Mais, en réalité, la comparaison des résultats expérimentaux aux prévisions théoriques ne se présente pas de cette façon idéale, parce que l'intégrale de dispersion ne peut être évaluée pratiquement qu'entre des limites finies ; nous allons montrer comment cette circonstance vient modifier la conclusion précédente du fait de la structure particulière de la fonction spectrale $\rho(a)$ du modèle Y.

2. Test d'élémentarité. — L'amplitude de la diffusion **N θ** est donnée, selon le modèle, par les expressions suivantes

$$(\text{II}.41)\quad M(E) = -\frac{g^2}{4\pi}\times\begin{cases}\dfrac{(2\pi)^4}{\mathbf{i}}\,S'(E) = \displaystyle\int \text{d}a\,\frac{\rho(a)}{E - a + \mathbf{i}\,\varepsilon} & (\text{modèle Y})\\[2ex] \dfrac{(2\pi)^4}{\mathbf{i}}\,S_1'(E) = \dfrac{1}{\delta\nu_1} + \displaystyle\int \text{d}a\,\frac{\rho_1(a)}{E - a + \mathbf{i}\,\varepsilon} & (\text{modèle F})\,.\end{cases}$$

En particulier, on a dans le modèle Y

$$(\text{II}.42)\qquad \text{Im}M(E) = \tfrac{1}{4}\,g^2\,\bar{\rho}(E)\,,$$

où $\bar{\rho}(E)$ est la fonction définie par (II.23). D'après les résultats du paragraphe

(6) La partie imaginaire est obtenue à partir de la section efficace totale par le théorème optique, $\sigma_t = (4\pi/k)\,f^2(E - m_{\mathbf{N}})\,\text{Im}M(E)$ et la partie réelle à partir de la section efficace différentielle vers l'avant, $(\text{d}\sigma/\text{d}\Omega)_0 = f^4(E - m_{\mathbf{N}})\,[|\text{Re}M(E)|^2 + |\text{Im}M(E)|^2]$. La diffusion est ici isotrope et l'on a simplement $\text{d}\sigma/\text{d}\Omega = \sigma_t/4\pi$.

II.2.3, il en résulte que l'amplitude $M(E)$ de ce modèle présente, au point α qui est indiqué sur les figures 4 et 5, un comportement de résonance dont les paramètres sont indiqués sur la figure 7 (7).

Plus précisément, si l'on introduit le déphasage $\delta(\omega)$ qui est donné par la formule

$$\exp[\mathbf{i}\,\delta(\omega)]\sin\delta(\omega) = k\,f^2(\omega)\,M(m_{\mathbf{N}}+\omega)\,, \tag{II.43}$$

on peut mettre cette dernière expression, au voisinage du point α, sous la forme classique de Breit et Wigner

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\delta}\sin\delta = \frac{-\frac{1}{2}\,\Gamma}{E - E_{\mathrm{R}} + \frac{1}{2}\,\mathbf{i}\,\Gamma}\,, \qquad E = \omega + m_{\mathbf{N}}\,, \tag{II.44}$$

où les paramètres, position et largeur, sont donnés par

$$E_{\mathrm{R}} = \alpha\,, \qquad \frac{\Gamma}{2} = \frac{g^2}{4\pi}\,\frac{k\,f^2(\alpha - m_{\mathbf{N}})}{Z}\,, \tag{II.45}$$

avec $k = \sqrt{(\alpha - m_{\mathbf{N}})^2 - \mu^2}$.

Supposons maintenant que l'évaluation des différents termes de la relation de dispersion (II.39) fasse apparaître la nécessité d'introduire une constante K non nulle et désignons par $E_{\max}$ la borne supérieure utilisée pour le calcul pratique de l'intégrale. La présence de cette constante n'indique pas nécessairement que la particule **V** est composée ; il peut se faire en effet que la particule **V** possède une constante de renormalisation non nulle mais suffisamment petite pour que le pic centré au point α soit situé au delà de $E_{\max}$. Si le point α est suffisamment éloigné on obtient alors pour la contribution à l'intégrale de (II.39) de la région englobant le pic la valeur approchée suivante, valable à basse énergie ($E \ll E_{\max}$),

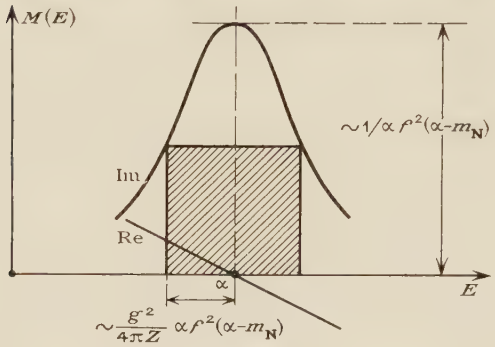


Fig. 7.

$$\frac{1}{\pi}\int_{E_{\max}}^{\infty} \mathrm{d}E'\,\frac{\mathrm{Im}\,M(E')}{E' - E} \sim \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{pic}} \mathrm{d}E'\,\frac{\mathrm{Im}\,M(E')}{E' - E} \sim \frac{1}{\pi\,\alpha}\int_{\mathrm{pic}} \mathrm{d}E'\,\frac{g^2}{4}\,\bar{\rho}(E')\,. \tag{II.46}$$

L'intégrale de $\bar{\rho}$ sous le pic a été évaluée au paragraphe II.2.3 et a été trouvée de l'ordre de $1/Z$ (on a en réalité la valeur $1/\pi\,Z$ pour l'aire qui correspond à la zone hachurée de la figure 7) ; on voit d'autre part à l'aide des figures 2 et 4 que l'on a sensiblement $\alpha \simeq m_{\mathbf{V}} - (\delta\nu/Z)$ si Z est assez petit (8). Il en résulte pour

(7) Le fait qu'un propagateur renormalisé puisse présenter un comportement de résonance à haute énergie, dès que la constante de renormalisation prend une valeur assez petite, a déjà été mis en évidence par K. W. Ford [9].

(8) Cette valeur coïncide avec la masse nue de la particule **V**. Ce résultat reste valable dans le cas général ; on l'obtient de la même façon que pour le modèle de Lee à condition de supposer $\delta\nu$ convergent. Ce fait permet en particulier d'expliquer pourquoi le passage à la limite sous le signe $\int$ dans (II.21) est valable : la fonction qui figure entre crochets sous l'intégrale dans (II.21) s'annule précisément à la masse nue de la particule **V**.

l'intégrale (II.46) une valeur voisine de $-g^2/4\pi\,\delta\nu$; cette dernière expression est exactement égale à la valeur de K donnée par (II.40) [3].

Ainsi, la constante K, qui intervient dans la relation (II.39) si la particule **V** est composée, représente physiquement la contribution à l'intégrale de dispersion d'une résonance qui est éloignée indéfiniment. Par conséquent, à moins que la constante K expérimentale ne soit nulle (la particule **V** étant alors sûrement élémentaire), il n'est pas possible de considérer que la relation de dispersion (II.39) fournit un test pratique d'élémentarité tant que l'on n'a pas observé de résonance à distance finie. Toutefois, dans l'hypothèse où l'expérience indique qu'il est nécessaire de faire figurer une constante K non nulle au second membre de (II.39), la valeur de cette constante permet de fixer une limite à la constante de renormalisation Z ; la constante K peut en effet s'écrire $K = g^2/4\pi\,\alpha\,Z$, ce qui donne

$$Z < g^2/4\pi\,K\,E_{\max}\,. \qquad \text{(II.47)}$$

L'expression (II.40) de K fournit d'autre part une évaluation de la constante de renormalisation $\delta\nu$.

Il est instructif de comparer le test précédent à un autre test d'élémentarité qui a été proposé par M. T. Vaughn, R. Aaron & R. D. Amado [5] et qui porte sur la mesure du déphasage de la diffusion **N θ**. On peut montrer en effet à l'aide des formules (II.41) et (II.43) que la variation de ce déphasage entre le seuil et l'énergie infinie dépend du modèle et possède la valeur 0 ou π suivant que la particule **V** est élémentaire ou composée. Le déphasage passe donc obligatoirement une fois par une valeur multiple de $\pi/2$ si la particule **V** est composée (et une seule fois pour le modèle étudié ici). Pour le modèle de Lee deux cas sont possibles suivant que le déphasage $\pi/2$ n'est pas atteint ou est atteint deux fois.

Au premier cas correspond la relation de dispersion (II.39) où la constante K expérimentale est nulle pourvu évidemment que l'énergie $E_{\max}$ soit suffisamment grande ; la convergence de l'intégrale de dispersion est ici plus rapide que celle du déphasage. On a, en effet,

$$\sin^2\delta(\omega) \simeq k\,f^2(\omega)\;\;\bar{\rho}(m_{\mathbf{N}}+\omega) \;\text{ et }\; \bar{\rho}(m_{\mathbf{N}}+\omega) \simeq k\,f^2(\omega)/\omega^2\,;$$

il en résulte pour le déphasage observé, en fonction de $E_{\max}$, la valeur $\delta \simeq \left[k\,f^2(\omega)/\omega\right]_{\omega\simeq E_{\max}}$ tandis que le reste de l'intégrale de dispersion est donné, à basse énergie, par

$$\int_{E_{\max}}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\,\frac{k'\,f^2(\omega')}{\omega'^2(\omega'-\omega)} < \left(\frac{k\,f^2(\omega)}{\omega}\right)_{\omega\simeq E_{\max}} \frac{1}{E_{\max}}\,.$$

Dans le cas où, dans le modèle Y, le déphasage atteint deux fois la valeur $\pi/2$ le deuxième point de passage par cette valeur correspond à la résonance centrée au point α. Les deux tests sont donc équivalents dans ce cas et s'appliquent dès que la limite $E_{\max}$ devient supérieure à α.

Dans tous les cas il semble bien que de cette façon l'on ne puisse obtenir de réponse positive qu'en faveur du caractère élémentaire de la particule **V** et jamais en faveur du caractère composé. En effet si l'on a observé un premier passage par $\pi/2$ du déphasage il est difficile de rejeter la possibilité d'un deuxième passage pour conclure que la particule **V** est composée ; il en est de même pour la relation de dispersion (II.39) où l'on ne peut savoir si la présence de la constante K doit être attribuée à l'existence d'une résonance d'énergie finie, mais non encore

atteinte par l'expérience ou au comportement asymptotique de $\mathrm{Re}M(E)$ [résonance à l'infini].

Notons encore que l'étude qui précède est susceptible d'application au cas de modèles plus généraux que le modèle de Lee ; toutefois, dans les cas où, comme ici, le commutateur à temps égaux est égal à une constante, celle-ci ne peut être mise en évidence que dans une relation de dispersion non soustraite (cf. remarque *1* du § II.2.*3*). Une telle relation est, par exemple, valable pour l'amplitude de la diffusion pion-nucléon avec échange de charge. D'après une expérience récente [10], il ne semble pas qu'il soit actuellement possible de mettre en évidence la présence d'une constante dans la partie réelle de cette amplitude. En effet, une relation de dispersion du type (II.39) implique que le rapport de la partie réelle à la partie imaginaire doit tendre vers $+\infty$ quand l'énergie augmente indéfiniment, alors qu'expérimentalement ce rapport reste de l'ordre de 1 pour l'amplitude d'échange de charge, jusqu'à une énergie de 18 GeV (9).

DEUXIÈME PARTIE

DIFFUSION PAR UNE PARTICULE COMPOSÉE

III. Diagonalisation de l'hamiltonien dans le secteur $\mathbf{V}\,\theta \leftrightsquigarrow \mathbf{N}\,\theta\,\theta$

Nous abordons, dans cette seconde partie, des problèmes qui concernent les phénomènes de diffusion sur la particule **V** composée. Dans le présent chapitre, le point de vue adopté est celui de la théorie stationnaire des collisions et nous nous proposons de généraliser les propriétés qui ont été établies dans l'étude du secteur $\mathbf{V} \rightleftarrows \mathbf{N}\,\theta$, en montrant que les états propres de l'hamiltonien du modèle F, dans le secteur $\mathbf{V}\,\theta \leftrightsquigarrow \mathbf{N}\,\theta\,\theta$, peuvent être obtenus à partir des états propres correspondants du modèle Y par le passage à la limite $Z \to 0$. En particulier nous aurons à chercher des états de diffusion dans lesquels intervient une particule composée.

Les résultats obtenus ici contribuent à préciser la propriété d'équivalence que l'argument général du paragraphe I.3 sur le formalisme lagrangien nous a permis de prévoir. De plus, ils permettent de penser que l'équivalence des deux modèles peut s'étendre à tous les phénomènes de diffusion dans lesquels la particule **V** appartient à l'état initial ou à l'état final. Au chapitre IV, la théorie des perturbations fournira la base d'une démonstration générale.

Dans le modèle Y les états propres de l'hamiltonien dans le secteur $\mathbf{V}\,\theta \leftsquigarrow \mathbf{N}\,\theta\,\theta$ sont de la forme

$$(\mathrm{III}.1) \qquad |\,\mathbf{Z}_{\vec{p}}\,\rangle = \int \mathrm{d}\vec{p}\;\mathrm{d}\vec{k}\;\delta(\vec{P}-\vec{p}-\vec{k})\;\chi_1(\vec{k})\;b^+_{\mathbf{V}}(\vec{p})\;a^+(\vec{k})\,|\,0\,\rangle + \\ + \int \mathrm{d}\vec{q}\;\mathrm{d}\vec{k}\;\mathrm{d}\vec{k}'\;\delta(\vec{P}-\vec{q}-\vec{k}-\vec{k}')\;\chi_2(\vec{k},\vec{k}')\;b^+_{\mathbf{N}}(\vec{q})\;a^+(\vec{k})\;a^+(\vec{k}')\,|\,0\,\rangle\,.$$

(9) Nous sommes redevable à Mrs P. Falk-Vairant et P. Sonderegger de nous avoir communiqué ce renseignement avant publication.

Dans le modèle F seule subsiste la combinaison

$$(\text{III}.2) \qquad |\, \mathbf{Z}'\vec{p}\,\rangle = \int \mathrm{d}\vec{q}\,\mathrm{d}\vec{k}\,\mathrm{d}\vec{k}'\,\delta(\vec{P}-\vec{q}-\vec{k}-\vec{k}')\,\chi_2'(\vec{k},\vec{k}')\,b_{\mathbf{N}}^{+}(\vec{q})\,a^{+}(\vec{k})\,a^{+}(\vec{k}')\,|\,0\,\rangle .$$

Les fonctions χ_2 et χ_2' sont symétriques dans l'échange de leurs arguments.

L'équation aux valeurs propres $\mathrm{H}\,|\,\mathbf{Z}\,\rangle = E\,|\,\mathbf{Z}\,\rangle$ donne, pour l'un et l'autre des deux modèles, les systèmes d'équations suivants :

modèle Y,

$$(\text{III}.3) \quad \begin{cases} (\omega_k + m_{\mathbf{V}} - \delta m_{\mathbf{V}} - E)\,\chi_1(\vec{k}) = 2\,\dfrac{g}{4\,\pi^{3/2}}\displaystyle\int \mathrm{d}\vec{k}'\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\,\chi_2(\vec{k},\vec{k}')\,, \\ (\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E)\,\chi_2(\vec{k},\vec{k}') = \\ \qquad = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{g}{4\,\pi^{3/2}}\,Z\left[\dfrac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\chi_1(\vec{k}') + \dfrac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\,\chi_1(\vec{k})\right], \end{cases}$$

modèle F,

$$(\text{III}.3') \quad \begin{cases} \chi_1'(\vec{k}) = \displaystyle\int \mathrm{d}\vec{k}'\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\,\chi_2'(\vec{k},\vec{k}')\,, \\ (\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E)\,\chi_2'(\vec{k},\vec{k}') = \\ \qquad = -\dfrac{\lambda}{2\,(2\,\pi)^3}\left[\dfrac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\chi_1'(\vec{k}') + \dfrac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\,\chi_1'(\vec{k})\right]. \end{cases}$$

Dans le système (III.3′) la fonction χ_1' est introduite afin de conserver au maximum le parallélisme des deux modèles.

Nous étudions maintenant les solutions des systèmes (III.3) et (III.3′).

1. **Etats liés.** — Nous nous plaçons dans le cas où l'énergie est inférieure au premier seuil $m_{\mathbf{V}} + \mu$. On a donc à fortiori $E < m_{\mathbf{N}} + 2\,\mu$ et la seconde équation de chacun des systèmes (III.3) et (III.3′) donne

$$(\text{III}.4) \qquad \chi_2(\vec{k},\vec{k}') = \frac{1}{2}\,\frac{g}{4\,\pi^{3/2}}\,\frac{1}{Z\,\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E} \times \left[\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\chi_1(\vec{k}') + \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\,\chi_1(\vec{k})\right],$$

$$(\text{III}.4') \qquad \chi_2'(\vec{k},\vec{k}') = -\frac{\lambda}{2\,(2\,\pi)^3}\,\frac{1}{\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E} \times \left[\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\chi_1'(\vec{k}') + \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}}\,\chi_1'(\vec{k})\right].$$

En reportant ces expressions dans la première équation du système correspondant on trouve, après utilisation des formules (I.7), (I.10) et (I.18),

$$(\text{III}.5) \qquad (\omega_k + m_{\mathbf{V}} - E)\,\Phi(E - m_{\mathbf{N}} - \omega_k)\,\chi_1(\vec{k}) = -\frac{g^2}{2\,(2\,\pi)^3}\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\int \mathrm{d}\vec{k}'\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}\,(\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E)}\,\chi_1(\vec{k}')\,,$$

$$(\text{III}.5') \qquad \varphi(E - m_{\mathbf{N}} - \omega_k)\,\chi_1'(\vec{k}) = -\frac{\lambda}{2\,(2\,\pi)^3}\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\int \mathrm{d}\vec{k}'\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}\,(\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E)}\,\chi_1'(\vec{k}'),$$

où φ et Φ sont les fonctions déjà définies par (I.10) et (I.18). Les fonctions qui multiplient χ_1 et χ'_1 dans les équations (III.5) et (III.5′) ne s'annulent pas, en vertu de la restriction imposée à E et des propriétés des fonctions φ et Φ. Il en résulte que χ_1 et χ'_1 ne dépendent que de ω_k ; en posant

$$\text{(III.6)} \qquad \chi_1(\omega_k) = \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\chi(\omega_k)\,, \qquad \chi'_1(\omega_k) = \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\chi'(\omega_k)\,,$$

on obtient les équations intégrales suivantes

$$\text{(III.7)} \qquad \chi(\omega) = \frac{g^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{(\omega + m_{\mathbf{V}} - E)\,\Phi(E - m_{\mathbf{N}} - \omega)} \times \\ \times \int_\mu^\infty d\omega'\,\frac{f^2(\omega')\,\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega' + \omega + m_{\mathbf{N}} - E}\,\chi(\omega')\,.$$

$$\text{(III.7′)} \qquad \chi'(\omega) = -\frac{\lambda}{4\pi^2}\,\frac{1}{\varphi(E - m_{\mathbf{N}} - \omega)} \times \\ \times \int_\mu^\infty d\omega'\,\frac{f^2(\omega')\,\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega' + \omega + m_{\mathbf{N}} - E}\,\chi'(\omega')\,.$$

Ces deux équations sont du type de celle qui est étudiée dans l'appendice et qui gouverne tout le secteur considéré ici. On a en effet, d'après (I.17) et (I.18),

$$\text{(III.8)} \qquad \frac{4\pi^2}{\lambda}\left[\varphi^+(\omega) - \varphi^-(\omega)\right] = \frac{4\pi^2}{g^2}\,(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\left[\Phi^+(\omega) - \Phi^-(\omega)\right] \\ = 2\pi\,\mathbf{i}\,f^2(\omega)\,\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\,.$$

On retrouve donc l'équation (A.3) en posant

$$\text{(III.9)} \qquad M = E - m_{\mathbf{N}}\,, \qquad P(z) = z + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}\,, \qquad R(z) = 0$$

et, selon le modèle,

$$\text{(III.10)} \qquad \beta(z) = \begin{cases} \Phi(z) = Z + \dfrac{g^2}{4\pi^2}\,\widehat{\sigma}(z) & \text{(modèle Y)} \\ \dfrac{\varphi(z)}{z + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}} = \dfrac{\lambda}{4\pi^2}\,\widehat{\sigma}(z) & \text{(modèle F)}\,, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\text{(III.11)} \qquad \widehat{\sigma}(z) = \int_\mu^\infty d\omega\,\frac{f^2(\omega)\,\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,(\omega - z)}\,.$$

En supposant une fonction de coupure convenable, la fonction $\beta(z)$ se comporte asymptotiquement comme Z ou $1/z$ (cf. appendice). Les cas des modèles Y et F rentrent alors respectivement dans les cas b) et a) du paragraphe A.4. Les équations considérées, étant homogènes, n'ont de solution que pour certaines valeurs de E qui représentent les masses des états liés.

1. Modèle F. — L'équation (III.7′) n'a de solution que pour $E = 2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$. On a alors à un facteur près

$$\text{(III.12)} \qquad \chi'(\omega) = 1/(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})$$

et l'état lié normé correspondant s'écrit

$$\text{(III.13)} \qquad |\,\mathbf{W}^{\vec{P}}\,\rangle = \frac{C^2}{\sqrt{2}}\int d\vec{q}\,d\vec{k}\,d\vec{k}'\,\delta(\vec{P} - \vec{q} - \vec{k} - \vec{k}') \times \\ \times \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\,(\omega_k + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}\,(\omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}\,b^+_{\mathbf{N}}(\vec{q})\,a^+(\vec{k})\,a^+(\vec{k}')\,|\,0\,\rangle\,,$$

où la constante C est définie par (I.14).

L'état $|\mathbf{W}'\rangle$ se déduit de $|\mathbf{V}'\rangle$ par une formule analogue à (I.13) où $|\mathbf{V}'\rangle$ est déduit de $|\mathbf{N}_{\vec{q}}\rangle = b^{+}_{\mathbf{N}}(\vec{q})|0\rangle$; l'expression (III.13) peut s'écrire

$$|\mathbf{W}'_{\vec{P}}\rangle = \frac{C}{\sqrt{2}} \int \mathrm{d}\vec{p}\ \mathrm{d}\vec{k}\ \delta(\vec{P} - \vec{p} - \vec{k}) \times \times \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\,(\omega_k + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}\, a^{+}(\vec{k})\,|\mathbf{V}'_{\vec{p}}\rangle . \tag{III.14}$$

Il est d'ailleurs possible de montrer par récurrence que, à une constante de normalisation près, cette formule permet de construire de proche en proche un état lié dans chacun des secteurs définis par $N_{\mathbf{N}} = 1$, $N_{\boldsymbol{\theta}}$ quelconque ; on trouve que la différence de masse entre des états liés, dont les nombres quantiques $N_{\boldsymbol{\theta}}$ diffèrent d'une unité, est constante et égale à $m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$; cette propriété peut être admise comme conséquence du fait que le fermion se comporte comme une source fixe et qu'il n'y a pas d'interaction directe $\boldsymbol{\theta}$-$\boldsymbol{\theta}$: les particules $\boldsymbol{\theta}$ sont liées à la source fixe indépendamment les unes des autres. Mais cette explication est sans doute trop sommaire car elle devrait s'appliquer aussi au modèle de Lee où elle est en défaut.

2. Modèle Y. — L'équation (A.30) fournit une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution de (III.7) ; cette condition peut s'écrire

$$d(E) = \frac{1}{\Phi(E - m_{\mathbf{V}})} - \frac{E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}}{2\,\pi\,\mathbf{i}} \int_{-\infty}^{E - m_{\mathbf{N}} - \mu} \frac{\mathrm{d}\omega}{\Phi(\omega)} \times \cdot \left[\frac{1}{\Phi^{-}(E - m_{\mathbf{N}} - \omega)} - \frac{1}{\Phi^{-}(E - m_{\mathbf{N}} - \omega)} \right] \frac{1}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,(\omega + m_{\mathbf{V}} - E)} = 0 . \tag{III.15}$$

C'est l'équation aux valeurs propres des états liés cherchés. Si elle possède une solution, la fonction $\chi(\omega)$ correspondante est donnée par (A.25) ; on a, à un facteur près,

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega - m_{\mathbf{V}} - E} + \frac{(E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}})\,\Phi(E - m_{\mathbf{V}})}{2\,\pi\,\mathbf{i}} \times \times \int_{-\infty}^{E - m_{\mathbf{N}} - \mu} \frac{\mathrm{d}\omega'}{\omega' - \omega} \frac{1}{\Phi(\omega')} \left[\frac{1}{\Phi^{-}(E - m_{\mathbf{N}} - \omega')} - \frac{1}{\Phi^{+}(E - m_{\mathbf{N}} - \omega')} \right] \frac{1}{(\omega' + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,(\omega' + m_{\mathbf{V}} - E)} . \tag{III.16}$$

On est donc amené à rechercher les solutions de l'équation (III.15).

3. Etude de l'équation aux valeurs propres. — Nous mettrons d'abord la fonction $d(E)$ sous une forme à la fois plus commode et plus générale à l'aide de la fonction spectrale de Lehmann $\varrho(a)$, qui a été définie par la formule (II.10). Cette fonction se décompose en une somme de deux termes $\varrho(a) = \delta(a - m_{\mathbf{V}}) + \bar{\varrho}(a)$, où la fonction $\bar{\varrho}(a)$ est positive, nulle pour $a < m_{\mathbf{N}} + \mu$.

Le changement de variable $\omega \to a = E - \omega$ permet de mettre l'expression (III.15) de $d(E)$ sous la forme

$$\text{(III.17)} \qquad d(E) = \frac{1}{\Phi(E - m_{\mathbf{V}})} - (E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}) \times$$

$$\times \int_{m_{\mathbf{N}}+\mu}^{\infty} da\ \bar{\rho}(a)\ \frac{1}{(a + m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}} - E)\ \Phi(E - a)}\,.$$

Puisque $\bar{\rho}(a) = 0$ pour $a < m_{\mathbf{N}} + \mu$, on ne change pas la valeur du second terme de (III.17) en remplaçant la limite inférieure d'intégration par $-\infty$. Le premier terme de (III.17) se déduit alors du second en remplaçant $\bar{\rho}(a)$ par $\delta(a - m_{\mathbf{V}})$, de sorte que l'on a

$$d(E) = -(E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}) \int_{-\infty}^{+\infty} da\ \rho(a)\ \frac{1}{(a + m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}} - E)\ \Phi(E - a)}\,.$$

Nous transformerons encore cette expression en introduisant le propagateur renormalisé de la particule **V** défini par (I.32). On a

$$d(E) = \frac{(2\,\pi)^4}{\mathbf{i}}\,(E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}) \int da\ \rho(a)\ S'(E + m_{\mathbf{N}} - a)\,.$$

D'après la formule de Lehmann (II.13), l'équation (III.15) prend la forme

$$\text{(III.18)} \qquad d(E) = (E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}) \times$$

$$\times \int da\ da'\ \rho(a)\ \rho(a')\ \frac{1}{E + m_{\mathbf{N}} - a - a' + \mathbf{i}\,\varepsilon} = 0\,.$$

Notons tout de suite que la masse $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ n'est pas solution de (III.18), car l'intégrale qui y figure est infinie pour cette valeur de E ; on a d'ailleurs, d'après (III.17), $d(2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}) = 1$. Il sera commode, pour étudier l'équation (III.18), de développer $d(E)$ en séparant les deux termes $\delta(a - m_{\mathbf{V}})$ et $\bar{\rho}(a)$ de la fonction de Lehmann. On obtient ainsi, après quelques calculs,

$$d(E) = -1 + \frac{2}{\Phi(E - m_{\mathbf{V}})} + (E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}) \int da\ da'\ \frac{\bar{\rho}(a)\ \bar{\rho}(a')}{E + m_{\mathbf{N}} - a - a' + \mathbf{i}\,\varepsilon}\,,$$

où le terme imaginaire du dénominateur du dernier terme ne joue aucun rôle puisque l'on a

$$E < m_{\mathbf{V}} + \mu\,, \qquad a, a' > m_{\mathbf{N}} + \mu\,, \qquad m_{\mathbf{V}} < m_{\mathbf{N}} + \mu\,.$$

En utilisant l'identité

$$\frac{1}{E + m_{\mathbf{N}} - a - a'} \equiv \frac{1}{E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}} + \frac{a + a' - 2\,m_{\mathbf{V}}}{(E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}})\,(E + m_{\mathbf{N}} - a - a')}\,,$$

on peut mettre enfin $d(E)$ sous la forme

$$\text{(III.19)} \qquad d(E) = \frac{1}{Z^2} - \frac{2}{Z} + \frac{2}{\Phi(E - m_{\mathbf{V}})} -$$

$$- \int da\ da'\ \bar{\rho}(a)\ \bar{\rho}(a')\ \frac{a + a' - 2\,m_{\mathbf{V}}}{a + a' - m_{\mathbf{N}} - E}\,.$$

Cette dernière expression montre immédiatement que $d(E)$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty,\ m_{\mathbf{V}} + \mu[$; l'équation aux valeurs propres a donc au plus une solution. On voit sur (III.18) que l'on a $d(-\infty) = \left[\int da\ \rho(a)\right]^2 = 1/Z^2 > 0$. Par conséquent, l'équation aux valeurs propres a ou n'a pas de solution suivant que $d(m_{\mathbf{V}} + \mu)$ est ou non négatif. Dans le cas où la solution $m_{\mathbf{W}}$ existe elle vérifie l'inégalité $m_{\mathbf{W}} > 2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ car on a $d(2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}) = 1$.

Conditions suffisantes à l'existence d'un état lié. — On a, d'après (III.17),

$$d(m_V + \mu) = \frac{1}{\Phi(\mu)} - (m_N + \mu - m_V) \int_{m_N+\mu}^{\infty} da \, \frac{\bar{\rho}(a)}{(a - m_N - \mu)\, \Phi(m_V + \mu - a)}.$$

La double inégalité $Z < \Phi(m_V + \mu - a) < \Phi(m_V - m_N) = 1$ entraîne aussitôt

$$\frac{1}{\Phi(\mu)} - \frac{m_N + \mu - m_V}{Z} \int_{m_N+\mu}^{\infty} da \, \frac{\bar{\rho}(a)}{a - m_N - \mu} < d(m_V + \mu),$$

$$d(m_V + \mu) < \frac{1}{\Phi(\mu)} - (m_N + \mu - m_V) \int_{m_N+\mu}^{\infty} da \, \frac{\bar{\rho}(a)}{a - m_N - \mu}.$$

On a, par un calcul simple,

$$\int_{m_N+\mu}^{\infty} da \, \frac{\bar{\rho}(a)}{a - m_N - \mu} = \frac{1}{m_N + \mu - m_V} \left(1 - \frac{1}{\Phi(\mu)}\right)$$

et il s'ensuit les inégalités

$$\frac{1}{\Phi(\mu)} + \frac{1}{Z\,\Phi(\mu)} - \frac{1}{Z} < d(m_V + \mu) < \frac{2}{\Phi(\mu)} - 1.$$

On en tire les conditions suffisantes suivantes, illustrées par le diagramme de la figure 8 :

$\Phi(\mu) > 2$, une valeur propre ;

$\Phi(\mu) < Z + 1$, pas de valeur propre.

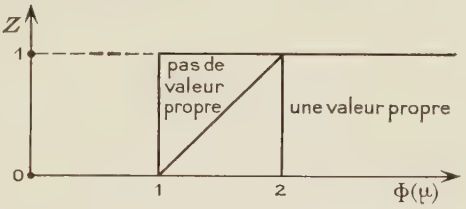


FIG. 8.

Notons en particulier que, d'après la formule (I.18), l'inégalité $\Phi(\mu) < Z + 1$ peut toujours être réalisée si l'on prend g^2 assez petit, tandis que les grandeurs $f(\omega)$, m_V, m_N et μ sont fixées ; le modèle de Lee n'a donc pas d'état lié dans le secteur étudié ici si la constante de couplage observable est assez petite ; il en va de même avec la constante de couplage nue.

4. Limite $Z \to 0$. — Nous allons montrer que l'état lié du modèle de Lee et sa valeur propre tendent, quand $Z \to 0$, vers l'état lié et la valeur propre du modèle F.

A) LIMITE DE LA VALEUR PROPRE. — La masse $2\,m_V - m_N$ de l'état lié du modèle F est la limite, quand $Z \to 0$, de la solution m_W de l'équation aux valeurs propres du modèle de Lee.

Démonstration. D'après (III.19), l'équation aux valeurs propres (III.15) s'écrit sous la forme $F_1(E) = F_2(E)$, si l'on pose

$$F_1(E) = \int da\, da'\, \bar{\rho}(a)\, \bar{\rho}(a')\, \frac{a + a' - 2\,m_V}{a + a' - m_N - E},$$

(III.20)

$$F_2(E) = \frac{1}{Z^2} - \frac{2}{Z} + \frac{2}{\Phi(E - m_V)}.$$

La fonction $F_2(E)$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, m_V + \mu[$; sa valeur au point $2\,m_V - m_N$ est $[(1/Z) - 1]^2 + 1$. La fonction $F_1(E)$ a des dérivées première et seconde positives sur le même intervalle ; elle est donc crois-

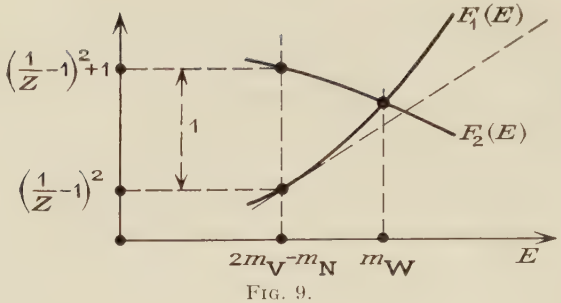


FIG. 9.

sante et convexe sur $]-\infty, m_V+\mu[$; sa valeur au point $2m_V - m_N$ est $[(1/Z) - 1]^2$ (fig. 9).

Le résultat que nous avons en vue sera atteint si l'on montre que

$$\left(\frac{dF_1}{dE}\right)_{E=2m_V-m_N} \underset{Z\to 0}{\to} \infty .$$

On a

$$\text{(III.21)} \qquad \left(\frac{dF_1}{dE}\right)_{E=2m_V-m_N} = \int da\, da' \, \frac{\bar\rho(a)\,\bar\rho(a')}{a+a'-2m_V} .$$

En effectuant l'intégration sur a', on obtient

$$\left(\frac{dF_1}{dE}\right)_{E=2m_V-m_N} = \int da \, \frac{\rho(a)}{a-m_V}\left(\frac{1}{\Phi(2m_V-m_N-a)}-1\right)$$

$$= -\Phi'(m_V-m_N) + \int \frac{da}{a-m_V}\,\frac{\bar\rho(a)}{\Phi(2m_V-m_N-a)} ,$$

avec

$$\Phi'(m_V-m_N) = \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{z=m_V-m_N} = \frac{g^2}{4\pi^2}\int_\mu^\infty d\omega\, \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{(\omega+m_N-m_V)^3} .$$

On a, d'autre part, la majoration

$$\Phi(2m_V-m_N-a) =$$

$$= Z + \frac{g^2}{4\pi^2}\int_\mu^\infty d\omega\, \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2-\mu^2}}{(\omega+m_N-m_V)(\omega+m_N-2m_V+a)} < Z + \frac{Kg^2}{a} ,$$

où K désigne une constante positive. On obtient alors

$$\left(\frac{dF_1}{dE}\right)_{E=2m_V-m_N} > -\Phi'(m_V-m_N) + \int da\,\frac{\bar\rho(a)}{a-m_V}\,\frac{a}{Za+Kg^2} .$$

L'intégrale du second membre se calcule facilement ; on a enfin

$$\left(\frac{dF_1}{dE}\right)_{E=2m_V-m_N} > \left(-1+\frac{m_V}{Zm_V+Kg^2}\right)\Phi'(m_V-m_N) +$$

$$+\frac{Kg^2}{(Zm_V+Kg^2)^2}\left(\frac{1}{\Phi[-m_N-(Kg^2/Z)]}-1\right).$$

Quand Z tend vers 0 les quantités g^2 et $\Phi'(m_V - m_N)$ restent finies tandis que $\Phi[-m_N-(Kg^2/Z)]$ tend vers 0, c. q. f. d.

Par conséquent, $f(\omega)$, m_V, m_N et μ étant donnés, le modèle de Lee possède un état lié pour une valeur de Z suffisamment petite ; sa masse m_W tend vers $2m_V - m_N$ par valeurs supérieures quand Z tend vers 0.

Les arguments qui précèdent permettent d'ailleurs de préciser le comportement de la fonction $d(E)$ quand Z tend vers 0. On voit tout d'abord que, sur l'intervalle $]2m_V - m_N, m_V + \mu[$, la fonction $d(E)$ tend vers $-\infty$ en vertu de ce qui a été démontré pour la fonction $F_1(E)$. Pour une valeur de E inférieure à $2m_V - m_N$ on a, d'après (III.19),

$$d(E) - d(2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}) = d(E) - 1 = \\ = \frac{2}{\Phi(E - m_{\mathbf{V}})} - 2 - (E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}) \int da\, da' \frac{\bar{\rho}(a)\,\bar{\rho}(a')}{a + a' - m_{\mathbf{N}} - E}.$$

Les deux premiers termes de cette expression tendent vers une limite finie ; l'intégrale du dernier terme se traite comme (III.21) et l'on trouve finalement pour $E < 2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$, $d(E) \to +\infty$. En définitive, si l'on pose

$$(\text{III.22}) \quad D(E) = \frac{d(E)}{E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}}} = \int da\, da' \frac{\rho(a)\,\rho(a')}{E + m_{\mathbf{N}} - a - a'}$$

on a, pour $E < m_{\mathbf{V}} + \mu$, $D(E) \underset{Z \to 0}{\to} -\infty$.

B) Limite du vecteur-état. — L'état lié normé du modèle de Lee, qui se trouve défini à un facteur près par les formules (III.1), (III.4), (III.6) et (III.16), tend vers le vecteur $|\mathbf{W}'\rangle$ du modèle F [équation (III.13)].

Nous montrons d'abord que $\chi(\omega)$ [équation (III.16)] tend vers $\chi'(\omega)$ [équation (III.12)] ; il suffit de prouver que l'intégrale qui figure dans (III.16) reste finie ; en effet, cette intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{da}{a + \omega - E} \frac{\bar{\rho}(a)}{(a + m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}} - E)\,\Phi(E - a)}, \qquad E = m_{\mathbf{W}}.$$

On a, d'après (III.10) et (III.11),

$$(a + m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}} - E)\,\Phi(E - a) > \frac{g^2}{4\,\pi^2}(a + m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}} - E)\,\hat{\sigma}(E - a) = \\ = \frac{g^2}{4\,\pi^2}(a + m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}} - E) \int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{(\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})(\omega - E + a)} > \alpha,$$

où α désigne une constante strictement positive. L'intégrale écrite plus haut, qui est positive, est donc majorée par

$$\frac{1}{\alpha} \int da \frac{\bar{\rho}(a)}{a + \omega - E} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\omega + m_{\mathbf{V}} - E} \left(\frac{1}{\Phi(E - m_{\mathbf{N}} - \omega)} - 1 \right)$$

qui reste fini quand Z tend vers 0, c. q. f. d.

On a maintenant, d'après (III.4),

$$\lim_{Z \to 0} Z\,\chi_2(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{g_1}{8\,\pi^{3/2}} \frac{f(\omega_k)\,f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_k\,\omega_{k'}}} \frac{1}{(\omega_k + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})(\omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}.$$

La norme du vecteur défini par $\chi(\omega)$ [équation (III.16)] croît comme $1/Z$ puisque l'on a, d'après (III.1),

$$\langle\, \mathbf{Z}_{\vec{P}} \mid \mathbf{Z}_{\vec{P}'} \,\rangle = \delta(\vec{P} - \vec{P}') \left[\frac{1}{Z} \int d\vec{k}\, |\chi_1(\vec{k})|^2 + 2 \int d\vec{k}\, d\vec{k}'\, |\chi_2(\vec{k}, \vec{k}')|^2 \right].$$

La composante sur l'état nu $|\,\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta}\,\rangle$, du vecteur normé proportionnel au précédent, se comporte donc comme $\sqrt{Z}\,\chi_1$ et tend vers 0, tandis que la composante sur l'état $|\,\mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}\,\rangle$ va comme $Z\,\chi_2$ et devient proportionnelle à χ_2'. Le vecteur normé tend bien alors exactement vers $|\,\mathbf{W}'_{\vec{p}}\,\rangle$.

2. **Etats de diffusion V θ.** — Nous considérons maintenant les systèmes (III.3) et (III.3′) dans le cas où l'énergie est supérieure à $m_{\mathbf{V}} + \mu$ et nous nous proposons de chercher les états de diffusion $|\,\mathbf{V}_{\vec{p}_1}\,\boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_1}\,\rangle^{\pm}$; l'énergie est donnée

par $E = m_{\mathbf{V}} + \omega_{k_1}$ et nous supposons pour commencer qu'elle est inférieure au seuil de production $m_{\mathbf{N}} + 2\,\mu$. Les équations (III.4) et (III.4′) sont donc encore valables de même que les équations (III.5) et (III.5′). Nous examinons d'abord le cas de l'équation (III.5).

1. Modèle Y. — Le polynôme qui figure dans le membre de gauche de l'équation (III.5) s'annule maintenant pour $\omega_k = \omega_{k_1}$; on obtient les solutions avec onde diffusée sortante ou entrante respectivement en posant

$$\text{(III.23)} \qquad \chi_1^{\pm}(\vec{k}) = Z\,\delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \\ + \frac{g^2}{2\,(2\pi)^3}\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\frac{1}{(\omega_k - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)\,\Phi(E - m_{\mathbf{N}} - \omega_k)} \times \\ \times \int \mathrm{d}\vec{k}'\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}\,(\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E)}\,\chi_1^{\pm}(\vec{k}').$$

Le facteur Z doit figurer devant la fonction $\delta(\vec{k} - \vec{k}_1)$ pour que l'état de diffusion obtenu contienne comme onde incidente l'état « non perturbé » $a^+(\vec{k}_1)\,|\,\mathbf{V}_{\vec{p}_1}\rangle$, où $|\,\mathbf{V}_{\vec{p}_1}\rangle$ désigne l'état physique de la particule $\mathbf{V}$ donné par (I.5) [10]. En posant

$$\text{(III.24)} \qquad \chi_1^{\pm}(\vec{k}) = Z\,\delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \frac{g^2}{2\,(2\pi)^3}\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}}\,\chi^{\pm}(\omega_k)\,,$$

on obtient l'équation

$$\text{(III.25)} \qquad \chi^{\pm}(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)\,\Phi(E - m_{\mathbf{N}} - \omega)} \times \\ \times \left(\frac{Z}{\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}} + \frac{g^2}{4\,\pi^2}\int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\,\frac{f^2(\omega')\,\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega' + \omega + m_{\mathbf{N}} - E}\,\chi^{\pm}(\omega')\right).$$

On retrouve l'équation (A.3) dans le cas non homogène ; sa solution est la suivante :

$$\text{(III.26)} \qquad \chi^{\pm}(\omega) = \frac{-Z}{(\omega_{k_1} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,\Phi^{\pm}(\omega_{k_1})} \times \\ \times \left(\frac{1}{\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}} + \frac{1}{\omega - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon}\right) + \frac{2\,Z}{(\omega_{k_1} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,\Phi^{\pm}(\omega_{k_1})\,D^{\pm}(E)} \times \\ \times \left\{\frac{1}{(\omega_{k_1} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})\,\Phi^{\pm}(\omega_{k_1})\,(\omega - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)} + \frac{1}{2\,\pi\,\mathbf{i}}\int_{-\infty}^{E - m_{\mathbf{N}} - \mu}\frac{\mathrm{d}\omega'}{\omega' - \omega}\,\frac{1}{\Phi(\omega')} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{\Phi^-(E - m_{\mathbf{N}} - \omega')} - \frac{1}{\Phi^+(E - m_{\mathbf{N}} - \omega')}\right]\frac{1}{(\omega' + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}} \pm \mathbf{i}\,\varepsilon)\,(\omega' - \omega_{k_1})}\right\},$$

où $D^{\pm}(E)$ désigne les limites sur l'axe réel de la fonction (III.22) étendue au plan complexe, qui possède une coupure sur $[m_{\mathbf{V}} + \mu, \infty[$. Pour une valeur de l'énergie

[10] Une onde incidente de ce type a déjà été utilisée dans le modèle statique de l'interaction pion-nucléon par G. C. Wick [11] ; une justification générale, englobant le cas des particules composées, a été donnée par H. Ekstein [12], dont les résultats seront brièvement exposés au paragraphe III.2. *2*. Dans le cas de l'état $|\,\mathbf{V}\boldsymbol{\theta}\,\rangle^{\pm}$ du modèle Y, la présence du facteur Z devant le premier terme de (III.23) se comprend aisément si l'on reporte ce terme dans l'expression (III.1) ; en effet Z représente la probabilité de trouver la particule $\mathbf{V}$ nue dans l'état physique de celle-ci ; l'état incident contient donc l'état nu, $|\,\mathbf{V}\boldsymbol{\theta}\,\rangle = \sqrt{Z}\,b_{\mathbf{V}}^{+}\,a^{+}\,|\,0\,\rangle$ affecté du facteur $\sqrt{Z}$.

supérieure au seuil de production $m_{\mathbf{N}} + 2\,\mu$, les équations doivent être reprises à partir du système (III.3), avant la division par le facteur $\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E$. L'équation (III.25) est alors remplacée par une équation du type (A.21) où $E \pm \mathbf{i}\,\varepsilon$ remplace E. La solution est de forme analogue à (III.26) où la fonction $1/(\omega' - \omega)\,\Phi(\omega')$ qui figure sous l'intégrale est remplacée par

$$1/(\omega' - \omega \pm \mathbf{i}\,\varepsilon)\,\Phi(\omega')\,.$$

L'état de diffusion $| \mathbf{V}_{\vec{p}_1}\,\boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_1} \rangle^{\pm}$ s'obtient à l'aide de (III.1), (III.4) et (III.24) ; il peut s'écrire

$$(\text{III.27}) \qquad | \mathbf{V}_{\vec{p}_1}\,\boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_1} \rangle^{\pm} = a^{+}(\vec{k}_1)\,| \mathbf{V}_{\vec{p}_1} \rangle + \frac{g^2}{2\,(2\pi)^3}\,\frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}} \times$$

$$\times \int \mathrm{d}\vec{p}\;\mathrm{d}\vec{k}\;\delta(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{p} - \vec{k})\,\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\chi^{\pm}(\omega_k)\,b^{+}_{\mathbf{V}}(\vec{p})\,a^{+}(\vec{k})\,|\,0\,\rangle +$$

$$+ \frac{1}{Z}\left(\frac{g}{4\,\pi^{3/2}}\right)^3 \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}} \int \mathrm{d}\vec{q}\;\mathrm{d}\vec{k}\;\mathrm{d}\vec{k}'\;\delta(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{q} - \vec{k} - \vec{k}') \times$$

$$\times \frac{f(\omega_k)\,f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_k\,\omega_{k'}}}\;\frac{\chi^{\pm}(\omega_k)}{\omega_k + \omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - E}\;b^{+}_{\mathbf{N}}(\vec{q})\,a^{+}(\vec{k})\,a^{+}(\vec{k}')\,|\,0\,\rangle\,.$$

Quand Z tend vers 0, la fonction $D^{\pm}(E)$ devient infinie tandis que l'expression entre accolades dans (III.26) reste finie ; la démonstration est analogue à celle qui a été faite au paragraphe III.1.*4*B pour $\chi(\omega)$. On a donc

$$\lim_{Z\to 0} \frac{1}{Z}\,\chi^{\pm}(\omega) = \frac{-1}{\delta\nu_1\,\varphi^{\pm}(\omega_{k_1})}\left(\frac{1}{\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}} + \frac{1}{\omega - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon}\right).$$

On en déduit que $\chi^{+}(\omega)$ tend vers 0 comme Z ; la composante du vecteur (III.27) sur les états nus $| \mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta} \rangle$ disparaît et il reste

$$(\text{III.28}) \qquad \lim_{Z\to 0} | \mathbf{V}_{\vec{p}_1}\,\boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_1} \rangle^{\pm} = a^{+}(\vec{k}_1)\,| \mathbf{V}'_{\vec{p}_1} \rangle - \left(\frac{g_1}{4\,\pi^{3/2}}\right)^3 \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}}\;\frac{1}{\delta\nu_1\,\varphi^{\pm}(\omega_{k_1})} \times$$

$$\times \int \mathrm{d}\vec{q}\;\mathrm{d}\vec{k}\;\mathrm{d}\vec{k}'\;\delta(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{q} - \vec{k} - \vec{k}') \times$$

$$\times \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\,(\omega_k - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)}\;\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}\,(\omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}\;b^{+}_{\mathbf{N}}(\vec{q})\,a^{+}(\vec{k})\,a^{+}(\vec{k}')\,|\,0\,\rangle\,.$$

2. Modèle F. — Le problème de définir les états de diffusion et les amplitudes dans lesquels interviennent des particules composées a été largement étudié dans le cas des collisions de réarrangement en mécanique quantique non relativiste [13]. Malgré quelques points obscurs [14], une formulation stationnaire du problème est depuis longtemps connue. A toute voie de réaction correspond un partage de l'hamiltonien total H en deux termes

$$(\text{III.29}) \qquad \mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + V\,,$$

où H_0 désigne la somme des hamiltoniens partiels des divers fragments de la voie et V la somme des potentiels d'interaction entre les particules appartenant à des fragments différents. On en déduit les états stationnaires de collision $| \Psi \rangle^{\pm}$ de la voie considérée, par les formules

$$(\text{III.30}) \qquad | \Psi \rangle^{\pm} = | \Phi \rangle + \frac{1}{E - \mathrm{H}_0 \pm \mathbf{i}\,\varepsilon}\,V\,| \Psi \rangle^{\pm}$$

ou

$$(\text{III}.31) \qquad |\,\Psi\,\rangle^{+} = |\,\Phi\,\rangle + \frac{1}{E - \text{H} \pm \mathbf{i}\,\varepsilon}\, V\,|\,\Phi\,\rangle\,,$$

où $|\,\Phi\,\rangle$ désigne l'état incident ou émergent, qui est constitué de fragments sans interaction. La formule (III.30) constitue une généralisation de l'équation de Lippman & Schwinger [15] (qui n'est valable que dans le cas de la diffusion d'une particule élémentaire par un potentiel), mais soulève des difficultés d'interprétation physique [14]. La formule (III.31) donne une expression formelle de l'état de diffusion en fonction de l'état asymptotique.

Le formalisme précédent ne peut s'appliquer à la théorie quantique des champs, pour laquelle il est impossible de décomposer l'hamiltonien total sous une forme telle que (III.29), si des particules composées participent à l'état initial ou à l'état final.

Une théorie des phénomènes de collision dépendant du temps, qui s'applique au cas de la théorie des champs, a été donnée par H. Ekstein [12]. Ekstein a montré que la formule (III.31) doit être remplacée par

$$(\text{III}.32) \qquad |\,\Psi\,\rangle^{\pm} = |\,\Phi\,\rangle + \frac{1}{E - \text{H} \pm \mathbf{i}\,\varepsilon}\,(\text{H} - E)\,|\,\Phi\,\rangle\,,$$

où $|\,\Phi\,\rangle$ doit être construit à partir des états physiques des particules incidentes ou émergentes. Dans le cas des collisions de réarrangement cet état coïncide avec celui que l'on considère usuellement et l'on retrouve bien la formule (III.31) puisque l'on a $\text{H}_0\,|\,\Phi\,\rangle = E\,|\,\Phi\,\rangle$. Mais la formule (III.32) est applicable à la théorie des champs ; dans ce cas l'opérateur $\text{H} - E$ qui s'applique à $|\,\Phi\,\rangle$ au second membre de (III.32) ne peut pas être remplacé par un potentiel d'interaction. L'état asymptotique $|\,\Phi\,\rangle$ est construit suivant des règles simples que nous ne donnerons pas ici en général.

Dans le problème qui nous intéresse l'état $|\,\Phi\,\rangle$ doit être pris égal à $a^{+}(\vec{k}_1)\,|\,\mathbf{V}'_{\vec{p}_1}\,\rangle$, où $|\,\mathbf{V}'_{\vec{p}_1}\,\rangle$ désigne l'état lié (I.13). Toutefois, l'évaluation du second membre de (III.32) demande la diagonalisation préalable de l'hamiltonien total H_F. Nous suivrons donc, pour déterminer les états de diffusion $|\,\mathbf{V}'\boldsymbol{\theta}\,\rangle^{\pm}$, une méthode formellement analogue à celle du paragraphe III.2.*1*. Mais il faudra vérifier à posteriori que les états de diffusion trouvés satisfont à l'équation (III.32).

En tenant compte de la deuxième formule (III.10), l'équation (III.5′) donne

$$\chi_1'^{\pm}(\vec{k}) = -\frac{(2\pi)^3\,C}{\lambda}\,\delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \frac{1}{4\pi}\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\,\frac{1}{(\omega_k - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)\,\hat{\sigma}(E - m_\text{N} - \omega_k)} \times$$

$$\times \int \mathrm{d}\vec{k}'\,\frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}\,(\omega_k + \omega_{k'} + m_\text{N} - E)}\,\chi_1'^{\pm}(\vec{k}')\,,$$

où la constante qui figure devant $\delta(\vec{k} - \vec{k}_1)$ est choisie de façon à retrouver l'état asymptotique $|\,\Phi\,\rangle$. En posant

$$\chi_1'^{\pm}(\vec{k}) = -\frac{(2\pi)^3\,C}{\lambda}\left[\delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + \frac{1}{4\pi}\frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}}\frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}}\,\chi'^{\pm}(\omega_k)\right],$$

on obtient l'équation

$$\chi'^{\pm}(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)\,\widehat{\sigma}(E - m_{\mathbf{N}} - \omega)} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}} + \int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \, \frac{f^2(\omega')\,\sqrt{\omega'^2 - \mu^2}}{\omega' + \omega + m_{\mathbf{N}} - E}\, \chi'^{\pm}(\omega') \right].$$

Les formules de l'appendice donnent la solution

$$\chi'^{\pm}(\omega) = -\frac{\lambda}{4\,\pi^2}\,\frac{1}{\varphi^{\pm}(\omega_{k_1})} \left(\frac{1}{\omega + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}} + \frac{1}{\omega - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon} \right)$$

et l'état de diffusion s'écrit

$$(\mathrm{III}.33) \qquad | \mathbf{V}'_{\vec{p}_1}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_1} \rangle^{\pm} = a^{+}(\vec{k}_1) \,|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}_1} \rangle - \frac{\bar{\lambda}\, C}{2\,(2\,\pi)^3}\, \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}}\, \frac{1}{\varphi^{\pm}(\omega_{k_1})} \times$$

$$\times \int \mathrm{d}\vec{q}\, \mathrm{d}\vec{k}\, \mathrm{d}\vec{k}'\, \delta(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{q} - \vec{k} - \vec{k}') \times$$

$$\times \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\,(\omega_k - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)}\, \frac{f(\omega_{k'})}{\sqrt{\omega_{k'}}\,(\omega_{k'} + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}\, b^{+}_{\mathbf{N}}(\vec{q})\, a^{+}(\vec{k})\, a^{+}(\vec{k}') \,|\, 0 \rangle .$$

On vérifie immédiatement que ce vecteur est égal au vecteur (III.28), limite de l'état propre du modèle Y.

Notons encore que, comme dans le cas de l'état lié, l'état de diffusion (III.33) peut se mettre sous la forme suivante, analogue à (I.9),

$$(\mathrm{III}.34) \qquad | \mathbf{V}'_{\vec{p}_1}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_1} \rangle^{\pm} = a^{+}(\vec{k}_1) \,|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}_1} \rangle - \frac{\lambda}{2(2\,\pi)^3}\, \frac{f(\omega_{k_1})}{\sqrt{\omega_{k_1}}}\, \frac{1}{\varphi^{\pm}(\omega_{k_1})} \times$$

$$\times \int \mathrm{d}\vec{p}\, \mathrm{d}\vec{k}\, \delta(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{p} - \vec{k})\, \frac{f(\omega_k)}{\sqrt{\omega_k}\,(\omega_k - \omega_{k_1} \mp \mathbf{i}\,\varepsilon)}\, a^{\mp}(\vec{k}) \,|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}} \rangle .$$

On peut montrer que les états de diffusion triple $| \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta} \rangle^{\pm}$ se déduisent des états $| \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta} \rangle^{\mp}$ par une formule semblable à celle-ci et construire alors par récurrence un système complet d'états propres dans les secteurs à un fermion. En particulier, la diagonalisation est ainsi achevée dans le secteur $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$ et la formule d'Ekstein (III.32) se vérifie aisément.

Nous écrirons encore, pour le modèle F, l'élément de matrice de la diffusion élastique $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta}$ que l'on retrouvera au paragraphe IV.2 par les méthodes de la théorie des perturbations. Il se déduit de (III.33) et s'écrit

$$(\mathrm{III}.35) \qquad \bar{\langle} \mathbf{V}'_{\vec{p}_\mathrm{f}}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_\mathrm{f}} \,|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}_\mathrm{i}}\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}_\mathrm{i}} \rangle^{+} = \delta(\vec{p}_\mathrm{i} - \vec{p}_\mathrm{f})\, \delta(\vec{k}_\mathrm{i} - \vec{k}_\mathrm{f}) -$$

$$- \frac{\mathbf{i}\,\lambda}{8\,\pi^2}\, \frac{f(\omega_{k_\mathrm{i}})\, f(\omega_{k_\mathrm{f}})}{\sqrt{\omega_{k_\mathrm{i}}\,\omega_{k_\mathrm{f}}}}\, \frac{1}{\varphi^{+}(\omega_{k_\mathrm{i}})}\, \delta^{(4)}(p_\mathrm{i} + k_\mathrm{i} - p_\mathrm{f} - k_\mathrm{f}) .$$

Cet élément de matrice est identique à celui qui correspond à la diffusion $\mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}$ [équation (I.15)] et ce résultat peut s'interpréter, comme il a été fait au paragraphe III.1.*1* pour la différence de masse des états liés, en considérant que les mésons se meuvent indépendamment dans le champ d'une source fixe. Cette explication permet aussi de comprendre pourquoi la réaction de production $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$ est absente de ce modèle. Dans le même ordre d'idées on trouve que dans la diffusion triple $\mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{N}\,\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$ chaque méson est diffusé indépendamment de l'autre par la source et conserve son énergie.

Ces phénomènes sont pathologiques et ne se présentent pas dans le modèle de

Lee. Il est donc vraisemblable qu'ils ne sont pas attachés au fait que l'on a une source fixe (qui possède d'ailleurs ici une impulsion) mais plutôt à une propriété d'invariance du modèle.

IV. Le secteur $\mathbf{V}\,\theta \rightleftarrows \mathbf{N}\,\theta\,\theta$ en théorie des perturbations

Nous allons, dans ce dernier chapitre, exposer des résultats qui permettent de préciser complètement la similitude qui existe, sous l'aspect de la théorie des perturbations, entre particule élémentaire et particule composée. La comparaison des modèles F et Y en théorie des perturbations, que l'on a commencé d'envisager au paragraphe 1.4, a pour but d'établir que les amplitudes de diffusion peuvent être représentées dans les deux modèles par des séries de diagrammes topologiquement identiques, qui sont les diagrammes irréductibles du modèle Y. Nous avons déjà montré que ce résultat est valable dans les cas où la particule **V** n'intervient que dans les états intermédiaires, à condition d'adopter une définition convenable pour le propagateur de la particule composée ; tant que la particule **V** est virtuelle, la démonstration ne repose que sur la possibilité d'effectuer, sur les diagrammes du modèle F, une sommation partielle des diagrammes en chaîne.

Il reste donc encore à montrer que l'emploi des diagrammes du modèle Y, pour le calcul des amplitudes du modèle F, est également justifié dans le cas des processus où la particule composée figure comme particule externe. Une preuve est donnée au paragraphe suivant et la démonstration, convenablement étendue, peut s'appliquer au cas des particules du type chaîne quelconques. La justification déborde évidemment du cadre habituel de la théorie des perturbations, dans laquelle l'intervention de l'hypothèse adiabatique interdit la considération des particules composées dans l'état initial ou dans l'état final, puisque celles-ci ne correspondent à aucune particule nue.

Avant d'entreprendre cette démonstration, il faut remarquer que l'usage de la théorie des perturbations, qui vient d'être défini, amène à faire une distinction entre deux éventualités qui ne sont peut-être pas nécessairement réalisées ensemble. En effet, si l'on considère la matrice $\boldsymbol{S}$ du modèle Y comme une fonctionnelle $S_{\mathrm{Y}}[S', g]$ du propagateur et de la constante de couplage, l'équivalence des deux modèles en théorie des perturbations signifie que la matrice $\boldsymbol{S}$ du modèle F est obtenue par la formule

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{F}} = S_{\mathrm{Y}}\Big[\lim_{Z\to 0} S', \lim_{Z\to 0} g\Big],$$

mais il n'est pas évident que cette propriété entraîne la relation

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{F}} = \lim_{Z\to 0} S_{\mathrm{Y}}[S', g]\,.$$

Autrement dit, l'opération de passage à la limite, qui donne le propagateur du modèle F à partir de celui du modèle Y, peut n'être pas valable pour un élément quelconque de la matrice $\boldsymbol{S}$ [11].

1. **La particule composée dans l'état initial ou final.** — Nous allons montrer que l'amplitude d'un processus quelconque du modèle F peut être calculée à partir des

[11] Toutefois, les résultats du chapitre III établissent la validité de ce passage à la limite dans le secteur $\mathbf{V}\,\theta \rightleftarrows \mathbf{N}\,\theta\,\theta$.

diagrammes correspondants du modèle Y en remplaçant le propagateur S' et la constante de couplage g par les grandeurs limites S_1' et g_1. Plus particulièrement, nous considérons ici les diagrammes dans lesquels figurent des lignes externes de la particule **V**.

Nous utiliserons pour la démonstration une formule générale, donnée par Mandelstam [16], qui repose essentiellement sur la condition asymptotique et sur la forme de la singularité du noyau de Bethe-Salpeter associé à un état lié. Cette formule permet d'exprimer un élément quelconque de la matrice **S** à l'aide des diagrammes de Feyman et des fonctions d'onde de Bethe-Salpeter des états liés. Par exemple, dans le cas de la diffusion élastique d'un état lié par une particule élémentaire, la matrice **S** est donnée par

$$(\text{IV}.1) \qquad {}^{+}\langle \mathrm{f} \mid \mathrm{i} \rangle^{+} = \int \mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{d}^4x_2\, \mathrm{d}^4x_3\, \mathrm{d}^4y_1\, \mathrm{d}^4y_2\, \mathrm{d}^4y_3 \times$$

$$\times\, \bar{\chi}_{\mathrm{f}_1}(y_1)\, \bar{\chi}_{\mathrm{f}_2}(y_2, y_3)\, G(y_1, y_2, y_3\,;\, x_1, x_2, x_3)\, \chi_{\mathrm{i}_1}(x_1)\, \chi_{\mathrm{i}_2}(x_2, x_3)\,,$$

où χ_{i_1} et χ_{f_1} désignent respectivement les fonctions d'onde initiale et finale de la particule élémentaire et χ_{i_2}, χ_{f_2} les fonctions d'onde de Bethe-Salpeter de l'état lié ; la fonction $G(y_1, y_2, y_3\,;\, x_1, x_2, x_3)$ désigne la somme de tous les diagrammes du type représenté par la figure 10 qui sont irréductibles, en ce sens que l'on ne peut en extraire aucune partie de self-énergie pour la particule élémentaire incidente ou émergente, aucune portion du noyau de Bethe-Salpeter pour l'état lié.

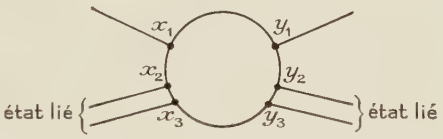
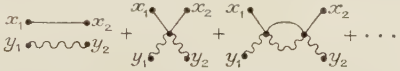


Fig. 10.

Pour la particule **V** composée du modèle F, le noyau de Bethe-Salpeter $K(x_2, y_2\,;\, x_1, y_1)$ est donné par la série des diagrammes

$$(\text{IV}.2) \qquad K(x_2, y_2\,;\, x_1, y_1) =$$



Dans le cas de la diffusion **V θ**, par exemple, la méthode de Mandelstam conduit à considérer la fonction de Green à six points qui correspond au processus **N θ θ** → **N θ θ** ; les diagrammes qui représentent cette fonction de Green débutent par un schéma du type indiqué par la figure 11. Les diagrammes irréductibles au sens défini plus haut s'obtiennent à partir de ceux-ci en supprimant la partie située à gauche des points x_1, x_2 et x_3 (les points x_1 et x_2 sont ici confondus du fait de la structure particulière de l'interaction) ; une opération analogue doit bien entendu être effectuée sur les lignes sortantes. Ces diagrammes irréductibles sont en correspondance avec les diagrammes du modèle Y qui sont du type indiqué par la figure 12 où chaque ligne de particule **V** repré-

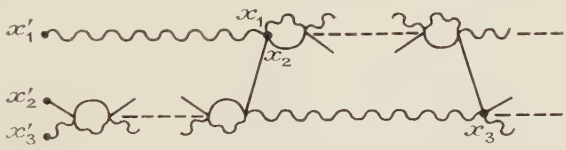


Fig. 11.

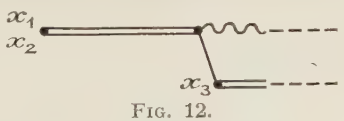
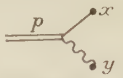


Fig. 12.

sente le propagateur renormalisé. Si l'on compare maintenant la forme que prend la formule (IV.1) pour la diffusion $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta}$ dans le modèle F à l'expression des diagrammes qui représentent la même diffusion dans le modèle Y, on voit aisément que la fonction d'onde de Bethe-Salpeter $\chi_{\vec{p}}(x, y)$ de l'état lié $|\,\mathbf{V}'_{\vec{p}}\,\rangle$ doit être identifiée à la portion de diagramme [12]

(IV.3) 

où la constante d'interaction qui est affectée au nœud est la constante de couplage limite g_1.

L'égalité de la fonction d'onde de Bethe-Salpeter et du diagramme (IV.3) sera maintenant établie par un calcul direct. Il sera commode d'associer à la particule $\boldsymbol{\theta}$ le champ $a(x)$ défini par (II.34) plutôt que le champ $A(x)$; la fonction de coupure $f(\omega)$ entre alors dans la définition du propagateur du méson $\widetilde{\Delta}(x)$ et de sa fonction d'onde libre $\langle\, 0 \,|\, a(x) \,|\, \boldsymbol{\theta}_{\vec{k}}\,\rangle$ et seule la constante de couplage λ est affectée au nœud .

On a d'abord, par définition,

$$\text{(IV.4)}\qquad \chi_{\vec{p}}(x, y) = \langle\, 0 \,|\, T\big(\Psi_{\mathbf{N}}(x)\, a(y)\big)\,|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}}\,\rangle =$$
$$= \theta(x_0 - y_0)\,\langle\, 0 \,|\Psi_{\mathbf{N}}(x)\, a(y)|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}}\,\rangle + \theta(y_0 - x_0)\,\langle\, 0 \,|\, a(y)\, \Psi_{\mathbf{N}}(x) \,|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}}\,\rangle\,,$$

où $|\,\mathbf{V}'_{\vec{p}}\,\rangle$ désigne l'état propre (I.13). Les deux termes de l'équation précédente peuvent être évalués directement en introduisant un système complet d'états entre les opérateurs $\Psi_{\mathbf{N}}$ et a ; il n'intervient dans chaque cas que les états nus $|\,\mathbf{N}\,\rangle$ ou $|\,\boldsymbol{\theta}\,\rangle$ et l'on obtient les formules

$$\text{(IV.5)}\qquad \langle\, 0 \,|\, \Psi_{\mathbf{N}}(x)\, a(y) \,|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}}\,\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{g_1}{2\,(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_{\mathbf{N}}(x_0-y_0)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}.\vec{x}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_{\mathbf{V}}y_0}\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\vec{k}\,\frac{f^2(\omega_k)}{\omega_k\,(\omega_k + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})}\,,$$

$$\langle\, 0 \,|\, a(y)\, \Psi_{\mathbf{N}}(x) \,|\, \mathbf{V}'_{\vec{p}}\,\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{g_1}{2\,(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\vec{k}\,\frac{f^2(\omega_k)}{\omega_k\,(\omega_k + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(y-x)}\,.$$

On a d'autre part, pour le diagramme (IV.3),

$$= \frac{\mathbf{i}\,g_1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^4z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pz}\,s(x-z)\,\widetilde{\Delta}(y-z)$$

$$= \frac{1}{2\,(2\pi)^4}\,\frac{\mathbf{i}\,g_1}{(2\pi)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\int \mathrm{d}^4k\,\frac{f^2(\omega_k)}{\omega_k}\,\frac{\exp\big[\mathbf{i}\,k\,(x-y)\big]}{(k_0 - \omega_k + \mathbf{i}\,\varepsilon)\,(k_0 + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}} - \mathbf{i}\,\varepsilon)}\,.$$

L'intégration sur k_0 peut être effectuée en fermant le contour par une demi-circonférence dans le plan complexe ; la présence de l'exponentielle amène à distin-

[12] L'indice p qui est affecté ici à la ligne de particule $\mathbf{V}$ signifie que l'on a effectué l'intégration sur le point de jonction des trois lignes, soit z, en attribuant à la particule $\mathbf{V}$ la fonction d'onde $[1/(2\pi)^{3/2}]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pz}$ qui correspond à l'impulsion $\vec{p}$.

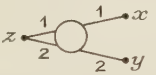
guer deux cas suivant le signe de $x_0 - y_0$ et, après comparaison aux formules (IV.4) et (IV.5), on trouve l'égalité annoncée

(VI.6) $\chi_{\vec{p}}(x, y) =$.

Cette formule achève de démontrer l'équivalence, en théorie des perturbations, de la particule **V** composée et de la particule **V** du modèle de Lee pour lequel la constante Z est nulle. Il est en effet facile de voir que le raisonnement qui vient d'être fait pour la diffusion **V θ** se généralise immédiatement au cas d'une diffusion quelconque.

Extension au cas des particules du type chaîne quelconques. — L'égalité qui est exprimée par la formule (IV.6) se présente de façon particulièrement simple dans le modèle de Lee où le vertex des trois particules envisagées jusqu'à présent est dénué de structure. Dans le cas de modèles plus complexes la portion de diagramme qui figure dans cette formule contiendra une fonction de vertex qu'il est naturel de prendre comme définition du vertex de la particule composée, sur sa couche de masse, avec ses constituants. Une telle identification du vertex d'une particule composée à une fonction d'onde de Bethe-Salpeter a déjà été considérée, d'une façon intuitive, par A. Salam [17], bien que l'interaction étudiée par cet auteur conduise à des diagrammes du type échelle plutôt que du type chaîne comme pour le modèle de Lee.

Dans le cas des particules du type chaîne la définition précédente de la fonction de vertex est en accord avec celle qui résulte naturellement de la considération des diagrammes de Feynman dans lesquels la particule composée intervient virtuellement. Si, par exemple, on considère l'interaction $\lambda\, \varphi_1^2\, \varphi_2^2$ de deux champs scalaires neutres φ_1, φ_2 et si cette interaction donne lieu à une particule composée des particules 1 et 2, le vertex des trois particules virtuelles sera contenu dans le diagramme ([13])

(IV.7) $G(x, y\,;\, z) =$ 

dans lequel aucune chaîne ne peut être extraite à droite du point z. Si, d'autre part, le pôle du noyau de Bethe-Salpeter ne provient que des diagrammes qui contiennent une chaîne intermédiaire, la contribution de la particule composée à ce noyau est la suivante

(IV.8) $$\int \mathrm{d}^4z\, \mathrm{d}^4z'\, \widetilde{G}(x, y\,;\, z)\, \Delta'(z' - z)\, G(x', y'\,;\, z')\,,$$

où Δ' représente le propagateur habillé de l'état lié. La singularité de cette dernière fonction, qui est associée à la propagation d'une particule, s'obtient en extrayant de la partie principale au pôle, qui est égale à $\dfrac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \dfrac{1}{p^2 - \mu^2 + \mathbf{i}\varepsilon}$, le terme qui correspond aux fréquences positives, soit $\dfrac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \dfrac{1}{2\omega_p} \dfrac{1}{p_0 - \omega_p + \mathbf{i}\varepsilon}$; on obtient, pour la contribution à (IV.8) de ce terme, l'expression

([13]) Le diagramme (IV.7) contient évidemment la partie de vertex $\Gamma(x', y'\,;\, z)$ à laquelle aboutissent les deux propagateurs habillés $\Delta_1(x - x')$ et $\Delta_2'(y - y')$.

$$\text{(IV.9)} \qquad \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\,\frac{\widetilde{G}(x,y\,;p)\,G(x',y'\,;p)}{2\,\omega_p\,(p_0-\omega_p+\mathbf{i}\,\varepsilon)}\,,$$

où l'on a introduit la fonction

$$\text{(IV.10)} \qquad G(x,y\,;p)=\int \mathrm{d}^4z\,G(x,y\,;z)\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}pz}\,.$$

Cette fonction joue ici le rôle de celle qui, dans le modèle de Lee, est représentée par le diagramme (IV.3).

La formule (IV.9) est de forme identique à celle qui, de façon classique, permet d'exprimer la contribution de l'état lié au noyau, à l'aide de sa fonction d'onde de Bethe-Salpeter. En effet, si l'on pose

$$\text{(IV.11)} \qquad \chi_{\vec{p}}(x,y)=\mathbf{e}^{-\mathbf{i}pX}\,f_{\vec{p}}(x-y)\,, \qquad p_0=\omega_p\,,$$

où X désigne la coordonnée du centre de masse, la partie principale du noyau de Bethe-Salpeter, au pôle de l'état lié, est donnée par [18]

$$\text{(IV.12)} \qquad \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\int \mathrm{d}^4p\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}p(X'-X)}\,\frac{f_{\vec{p}}(x'-y')\,\widetilde{f}_{\vec{p}}(x-y)}{p_0-\omega_p+\mathbf{i}\,\varepsilon}\,.$$

On déduit immédiatement de (IV.9) et (IV.12)

$$\text{(IV.13)} \qquad \mathbf{e}^{-\mathbf{i}pX}\,f_{\vec{p}}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\,\omega_p}}\,G(x,y\,;p)\,.$$

Pour une particule sur sa couche de masse la formule précédente se réduit à

$$\text{(IV.14)} \qquad \chi_{\vec{p}}(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\,\omega_p}}\,G(x,y\,;p)\,|_{p_0=\omega_p}\,.$$

Au facteur cinématique près, la fonction $G(x,y\,;p)$ pour une particule composée externe est donc bien donnée par la fonction d'onde de Bethe-Salpeter. Il résulte maintenant de la formule de Mandelstam que ce résultat fournit, pour la fonction de vertex de la particule du type chaîne avec ses constituants, une définition qui est valable tant pour une particule composée virtuelle que pour une particule réelle. De plus, si l'on définit encore le propagateur de la particule composée par la somme des diagrammes en chaîne, on voit que, comme dans le cas du modèle de Lee, les amplitudes du modèle de type F peuvent être représentées par les diagrammes du modèle correspondant de type Y.

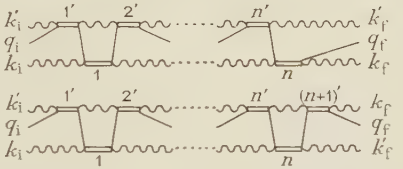
Remarque. — Notons ici la différence qui existe entre les particules du type chaîne et les particules du type échelle. On peut encore, pour ces dernières, définir une fonction de vertex à l'aide de la fonction d'onde de Bethe-Salpeter mais sa signification en théorie des perturbations est moins claire puisqu'ici, en raison de l'absence d'une correspondance topologique à un modèle de particule élémentaire, il n'est possible de représenter, à l'aide de cette fonction de vertex, que la partie principale au pôle du noyau de propagation ; contrairement au cas des particules du type chaîne, la partie résiduelle du noyau ne semble pas jusqu'à présent pouvoir recevoir une interprétation graphique dans un modèle de particule élémentaire.

2. **Calcul des amplitudes de diffusion.** — Le résultat du paragraphe IV.1 va maintenant être illustré explicitement par le calcul, en théorie des perturbations,

des diverses amplitudes de diffusion du secteur $\mathbf{V\,\theta} \lessdot \mathbf{N\,\theta\,\theta}$, pour les deux modèles F et Y. Ces amplitudes se déduisent toutes de l'élément de matrice qui correspond à la diffusion triple $\mathbf{N\,\theta\,\theta} \to \mathbf{N\,\theta\,\theta}$; nous montrons que la somme des diagrammes qui contribuent à cette diffusion satisfait à une équation intégrale que l'on peut ramener à l'équation étudiée dans l'appendice.

On doit noter que le fait de traiter, en théorie des perturbations, la particule composée comme une particule élémentaire impose l'utilisation du propagateur habillé ; en rapport avec ce fait, il est à craindre que le remplacement de ce propagateur par l'approximation usuelle, qui n'en retient que son pôle et son résidu (approximation de Born de la théorie à couplage de Yukawa), puisse conduire à des résultats inexacts, si cette approximation est utilisée dans un calcul de diagrammes où le comportement asymptotique du propagateur joue un rôle. Dans l'exemple qui est traité ici nous verrons explicitement l'influence du comportement asymptotique du propagateur de la particule **V** sur la somme des diagrammes en échelle qui décrivent la diffusion $\mathbf{V\,\theta}$.

1. Equation intégrale pour la diffusion $\mathbf{N\,\theta\,\theta} \to \mathbf{N\,\theta\,\theta}$. — Les quadriimpulsions initiale et finale de la particule **N** seront désignées respectivement par q_i et q_f, celles des mésons par k_i, k'_i et k_f, k'_f. Les diagrammes connexes sont des deux types suivants :



où le schéma ▬▬ représente le propagateur renormalisé de la particule **V**. On suppose que les facteurs cinématiques ne sont pas inclus dans $G_\mathrm{n}^{(1)}$ et $G_\mathrm{n}^{(2)}$; en posant

$$\text{(IV.15)} \quad S(q_\mathrm{i}, k_\mathrm{i}, k'_\mathrm{i}\,;\, q_\mathrm{f}, k_\mathrm{f}, k'_\mathrm{f}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} G_\mathrm{n}^{(1)}(q_\mathrm{f}, k_\mathrm{f}, k'_\mathrm{f}) + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} G_\mathrm{n}^{(2)}(q_\mathrm{f}, k_\mathrm{f}, k'_\mathrm{f}) ,$$

on obtient, pour l'élément de matrice **S** correspondant à la somme de tous les diagrammes connexes, l'expression

$$\text{(IV.16)} \quad M(q_\mathrm{i}, k_\mathrm{i}, k'_\mathrm{i}\,;\, q_\mathrm{f}, k_\mathrm{f}, k'_\mathrm{f}) = \\ = \frac{1}{4\,(2\,\pi)^9} \frac{1}{\sqrt{\omega_{k_\mathrm{i}}\,\omega_{k'_\mathrm{i}}\,\omega_{k_\mathrm{f}}\,\omega_{k'_\mathrm{f}}}} \left[S(q_\mathrm{i}, k_\mathrm{i}, k'_\mathrm{i}\,;\, q_\mathrm{f}, k_\mathrm{f}, k'_\mathrm{f}) + \text{permutations}\right] ,$$

où les permutations à effectuer concernent les échanges $k_\mathrm{i} \leftrightarrow k'_\mathrm{i}$ ou $k_\mathrm{f} \leftrightarrow k'_\mathrm{f}$.

On établit aisément des relations de récurrence entre les diagrammes $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ en ajoutant à chacun d'eux une boucle nouvelle ; il s'introduit ainsi deux nœuds et trois lignes intérieures supplémentaires ce qui ne laisse finalement subsister qu'une intégration. On obtient [14]

[14] Dans ce paragraphe les constantes de couplage g, g_1 et les propagateurs S', S'_1 seront désignés par la notation unique g, S', les propriétés particulières du propagateur, suivant la valeur de Z, n'intervenant qu'au paragraphe IV.2.*2*.

$$\text{(IV.17)} \qquad \begin{Bmatrix} G_n^{(2)}(q,k,k') \\ G_{n+1}^{(1)}(q,k,k') \end{Bmatrix} = g^2 f(\omega_k) S'(q_0 + k_0) \int d^4k_1 \times$$

$$\times \frac{f(\omega_{k_1})}{2\,\omega_{k_1}\,(k_1 - \omega_{k_1} + i\varepsilon)} \frac{1}{q_0 + k_0 - k_1 - m_N + i\varepsilon} \begin{Bmatrix} G_n^{(1)}(q + k - k_1, k', k_1) \\ G_n^{(2)}(q + k - k_1, k', k_1) \end{Bmatrix}.$$

Si l'on pose

$$\text{(IV.18)} \qquad \begin{aligned} G_n^{(1)}(q,k,k') &= f(\omega_k) f(\omega_{k'}) \Gamma_{2n-1}(q + k, k'), \\ G_n^{(2)}(q,k,k') &= f(\omega_k) f(\omega_{k'}) \Gamma_{2n}(q + k, k') \end{aligned}$$

les deux formules (IV.17) sont équivalentes à l'unique relation

$$\text{(IV.19)} \qquad \Gamma_{n+1}(k,k') = g^2 S'(k_0) \times$$

$$\times \int d^4k_1 \frac{f^2(\omega_{k_1})}{2\,\omega_{k_1}\,(k_1 - \omega_{k_1} + i\varepsilon)} \frac{1}{k_0 - k_1 - m_N + i\varepsilon} \Gamma_n(k + k' - k_1, k_1).$$

La formule (IV.15) est remplacée par

$$\text{(IV.20)} \qquad S(q_i, k_i, k_i'; q_f, k_f, k_f') = f(\omega_{k_f}) f(\omega_{k_f'}) \sigma(q_k + k_f, k_f'),$$

avec

$$\sigma(k,k') = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(k,k').$$

En sommant sur n les deux membres de la relation (IV.19) on trouve l'équation intégrale suivante pour $\sigma(k,k')$:

$$\sigma(k,k') = \Gamma_1(k,k') + g^2 S'(k_0) \times$$

$$\times \int d^4k_1 \frac{f^2(\omega_{k_1})}{2\,\omega_{k_1}\,(k_1 - \omega_{k_1} + i\varepsilon)} \frac{1}{k_0 - k_1 - m_N + i\varepsilon} \sigma(k + k' - k_1, k_1),$$

où le terme non homogène a pour valeur

$$\Gamma_1(k,k') = i g^4 (2\pi)^{12} f(\omega_{k_i}) f(\omega_{k_i'}) S'(q_i + k_i') \times$$

$$\times \frac{1}{k_0 - k_i - m_N + i\varepsilon} S'(k_0)\, \delta^{(4)}(k + k' - q_i - k_i - k_i').$$

En posant pour simplifier

$$\text{(IV.21)} \qquad A = S'(q_i + k_i')$$

et en définissant $\varpi(k)$ par

$$\text{(IV.22)} \qquad \sigma(k,k') = i g^4 (2\pi)^{12} f(\omega_{k_i}) f(\omega_{k_i'}) \varpi(k)\, \delta^{(4)}(k + k' - q_i - k_i - k_i')$$

on aboutit à l'équation

$$\text{(IV.23)} \qquad \varpi(k) = S'(k_0) \left[\frac{A}{k_0 - k_i - m_N + i\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + g^2 \int d^4k_1 \frac{f^2(\omega_{k_1})}{2\,\omega_{k_1}\,(k_1 - \omega_{k_1} + i\varepsilon)} \frac{1}{k_0 - k_1 - m_N + i\varepsilon} \varpi(P_i - k_1) \right],$$

où P_i désigne l'impulsion totale entrante.

Nous allons procéder à une transformation de l'équation (IV.23). On voit d'abord, sur cette équation, que $\varpi(k)$ ne dépend que de k_0 ; en désignant par E l'énergie totale incidente, l'équation (IV.23) peut s'écrire

$$(\text{IV}.24)\qquad \varpi(k_0) = S'(k_0)\left[\frac{A}{k_0 - \overset{0}{k}_{\text{i}} - m_{\text{N}} + \mathbf{i}\,\varepsilon} + 2\pi g^2 \int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \,\frac{\varpi(x)}{(E - \omega - x + \mathbf{i}\,\varepsilon)\,(k_0 - E - m_{\text{N}} + x + \mathbf{i}\,\varepsilon)}\right].$$

Introduisons maintenant la fonction de variable complexe $\widehat{\varpi}(z)$ qui est définie par le second membre de (IV.24) où z remplace k_0 et où $S'(z)$ désigne le prolongement analytique du propagateur, que l'on écrira désormais $S'^{+}(p_0)$. La fonction $\widehat{\varpi}(z)$ est méromorphe dans le complémentaire de l'axe réel et possède les pôles simples $m_{\text{V}} - \mathbf{i}\,\varepsilon'$ et $\overset{0}{k}_{\text{i}} + m_{\text{N}} - \mathbf{i}\,\varepsilon$; elle tend vers 0 quand z tend vers l'infini, pour chacun des deux modèles F et Y.

L'équation (IV.24) se réduit à la condition $\widehat{\varpi}^{+}(k_0) = \varpi(k_0)$; cette dernière permet d'effectuer l'intégration en x qui figure au second membre de (IV.24) en fermant le contour d'intégration par une demi-circonférence située dans le demi-plan supérieur ; on obtient

$$\int \mathrm{d}x \,\frac{\widehat{\varpi}^{+}(x)}{(E - \omega - x + \mathbf{i}\,\varepsilon)\,(z + x - E - m_{\text{N}})} =$$

$$= \frac{2\pi\,\mathbf{i}}{z - m_{\text{N}} - \omega + \mathbf{i}\,\varepsilon}\left[-\,\widehat{\varpi}^{+}(E - \omega) + \theta(-\operatorname{Im} z)\,\widehat{\varpi}(E + m_{\text{N}} - z)\right],$$

où la présence du dernier terme dépend du signe de $\operatorname{Im} z$. En reportant cette expression dans (IV.24) on voit alors que, pour $\operatorname{Im} z > 0$, la fonction $\widehat{\varpi}(z)$ coïncide avec la fonction $\widetilde{\varpi}(z)$ qui est définie par l'équation

$$(\text{IV}.25)\qquad \widetilde{\varpi}(z) = S'(z)\left[\frac{A}{z - \overset{0}{k}_{\text{i}} - m_{\text{N}} + \mathbf{i}\,\varepsilon} - \right.$$

$$\left. - 4\pi^2\,\mathbf{i}\,g^2 \int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega\,\frac{f^2(\omega)\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}{z - m_{\text{N}} - \omega}\,\widetilde{\varpi}^{+}(E - \omega)\right].$$

On retrouve l'équation (A.21) de l'appendice pour la fonction $\widetilde{\varpi}(E - z)$; la fonction $\varpi(k_0)$ cherchée s'obtient à partir de la solution par la formule

$$(\text{IV}.26)\qquad \varpi(k_0) = \widetilde{\varpi}^{+}(k_0)\,.$$

Nous donnons maintenant l'expression explicite de cette solution.

2. Solution de l'équation (IV.25). — Suivant la valeur de Z la fonction $\beta(z)$ de l'appendice est reliée au propagateur par la formule

$$\frac{1}{P(z)\,\beta(z)} = \begin{cases} S'(z + m_{\text{N}}) & \text{pour} \quad Z \neq 0 \\ S'_1(z + m_{\text{N}}) & \text{pour} \quad Z = 0\,, \end{cases}$$

avec $P(z) = z + m_{\text{N}} - m_{\text{V}} + \mathbf{i}\,\varepsilon$. Comme pour les équations étudiées au chapitre III, le comportement asymptotique de la fonction $\beta(z)$ dépend de celui du propagateur ; les cas de la particule composée ou élémentaire correspondent respectivement aux cas a) et b) du paragraphe A.4, ce que l'on retrouve directement ici en remarquant que les conditions d'existence qui sont données dans l'appendice peuvent s'écrire sous la forme

$$\text{(IV.27)} \qquad \begin{cases} \widetilde{\varpi}(z) \underset{|z|\to\infty}{\to} 0\,, & Z = 0 \\ z\,\widetilde{\varpi}(z) \underset{|z|\to\infty}{\to} 0\,, & Z \neq 0\,, \end{cases}$$

La nécessité de ces conditions s'aperçoit immédiatement sur l'équation (IV.25) si l'on tient compte du comportement asymptotique du propagateur. Nous allons voir que les formules (IV.27) jouent un rôle important dans la détermination de la forme de la solution $\widetilde{\varpi}(z)$.

A) Cas $Z = 0$. — Les formules du paragraphe A.4 donnent immédiatement l'expression de $\widetilde{\varpi}(z)$ en fonction du propagateur limite S_1'. Les expressions obtenues peuvent être condensées par une manipulation analogue à celle qui a été effectuée au paragraphe III.1 pour l'équation (III.17) ; on reconnaît dans l'expression de la fonction $\Delta(\omega)$ de (A.25) la partie continue de la fonction spectrale limite définie par (II.17), tandis que la partie discrète de cette fonction spectrale correspond au terme à pôle de la deuxième formule (A.25), qui provient de la présence du propagateur figurant au second membre de (IV.25). On obtient ainsi la formule

$$\text{(IV.28)} \qquad \widetilde{\varpi}(z) = \frac{S_1'^{-}(m_N + \overset{0}{k_i})\; S_1'^{+}(E - \overset{0}{k_i})}{z - m_N - \overset{0}{k_i}} + \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} \times$$

$$\times \int \frac{da}{a - z}\, \rho_1(a)\; S_1'^{+}(E + m_N - a) \left(\frac{1}{a + \overset{0}{k_i} - E - \mathbf{i}\varepsilon} - \frac{1}{a - m_N - \overset{0}{k_i} + \mathbf{i}\varepsilon} \right).$$

Cette formule peut encore être simplifiée si l'on y remplace la fonction spectrale par l'expression $\rho_1(a) = (2\pi)^3 \left[S_1'^{+}(a) - S_1'^{-}(a) \right]$, où les deux termes contribuent également au terme $\delta(a - m_V)$ relatif au pôle du propagateur par des quantités du type $\delta^{-}(a - m_V)$ et $\delta^{+}(a - m_V)$. La partie de l'intégrale figurant dans (IV.28), qui contient le produit $S_1'^{-}(a)\; S_1'^{+}(E + m_N - a)$, s'interprète comme une intégrale de la fonction $S_1'(u)\; S_1'(E + m_N - u)$ sur un chemin situé au-dessous de l'axe réel du plan u ; en fermant le contour dans le demi-plan inférieur et en supposant $\mathrm{Im} z > 0$, ce qui suffit pour définir $\varpi(x)$, on obtient successivement

$$\int \frac{da}{a - z}\, S_1'^{-}(a)\; S_1'^{+}(E + m_N - a)\; \frac{1}{a + \overset{0}{k_i} - E - \mathbf{i}\varepsilon} = 0$$

puisque les pôles sont tous dans le demi-plan supérieur et

$$\int \frac{da}{a - z}\, S_1'^{-}(a)\; S_1'^{+}(E + m_N - a)\; \frac{1}{a - m_N - \overset{0}{k_i} + \mathbf{i}\varepsilon} =$$

$$= 2\pi\mathbf{i} - \frac{S_1'^{-}(m_N + \overset{0}{k_i})\; S_1'^{+}(E - \overset{0}{k_i})}{z - m_N - \overset{0}{k_i} + \mathbf{i}\varepsilon}.$$

Cette partie de l'intégrale disparaît avec le premier terme de (IV.28) et il reste enfin

$$\text{(IV.29)} \qquad \widetilde{\varpi}(z) = \frac{-1}{2\pi\mathbf{i}} \int \frac{da}{a - z}\, S_1'^{+}(a)\; S_1'^{+}(E + m_N - a) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{a + \overset{0}{k_i} - E - \mathbf{i}\varepsilon} - \frac{1}{a - m_N - \overset{0}{k_i} + \mathbf{i}\varepsilon} \right), \qquad \mathrm{Im} z > 0\,.$$

B) Cas $Z \neq 0$. — Il faut maintenant tenir compte, dans les formules du paragraphe A.4, de la présence d'une constante q non nulle. Les manipulations faites plus haut peuvent être exactement reproduites ici et l'on aboutit à une formule analogue à (IV.28) dans laquelle une constante vient s'ajouter à la somme des deux termes à pôle qui figure sous l'intégrale au second membre ; on s'assure sans peine que le même résultat est valable pour la formule (IV.29). La valeur de cette constante est déterminée, par les formules du paragraphe A.4 ou, plus aisément, par la deuxième condition (IV.27).

On obtient finalement, toujours pour $\mathrm{Im} z > 0$,

$$\tilde{\varpi}(z) = -\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int \frac{da}{a - z} S'^{+}(a)\, S'^{+}(E + m_{\mathbf{N}} - a) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{a + \overset{0}{k}_{\mathrm{i}} - E - \mathbf{i}\varepsilon} - \frac{1}{a - m_{\mathbf{N}} - \overset{0}{k}_{\mathrm{i}} + \mathbf{i}\varepsilon} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int da\, S'^{+}(a)\, S'^{+}(E + m_{\mathbf{N}} - a) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{a + \overset{0}{k}_{\mathrm{i}} - E - \mathbf{i}\varepsilon} - \frac{1}{a - m_{\mathbf{N}} - \overset{0}{k}_{\mathrm{i}} + \mathbf{i}\varepsilon} \right) \times$$

$$\times \frac{\int [da/(a - z)]\, S'^{+}(a)\, S'^{+}(E + m_{\mathbf{N}} - a)}{\int da\, S'^{+}(a)\, S'^{+}(E + m_{\mathbf{N}} - a)} . \tag{IV.30}$$

On retrouve, au dénominateur du second terme du membre de droite, la fonction $D(z)$, déjà définie par (III.22) et dont le zéro coïncide avec la masse $m_{\mathbf{W}}$ de l'état lié $\mathbf{V\theta}$; on a en effet

$$\int da\, S'(a)\, S'(E + m_{\mathbf{N}} - a) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int da\, \rho(a)\, S'(E + m_{\mathbf{N}} - a) =$$

$$= \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^7} \int da\, da' \frac{\rho(a)\, \rho(a')}{E + m_{\mathbf{N}} - a - a' + \mathbf{i}\varepsilon} = \frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^7} D^{+}(E) .$$

Il sera utile pour la suite de faire apparaître la dépendance de $\tilde{\varpi}$ dans les variables incidentes q_{i}, k_{i} et k'_{i}. On voit d'abord que, d'après la définition des diagrammes $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$, la fonction S de (IV.15) ne dépend, aux facteurs cinématiques près, que des variables (non indépendantes) $q_{\mathrm{i}} + k'_{\mathrm{i}}$, $q_{\mathrm{f}} + k_{\mathrm{f}}$, k_{i}, k'_{f} et est symétrique dans les échanges simultanés $q_{\mathrm{i}} + k'_{\mathrm{i}} \leftrightarrow q_{\mathrm{f}} + k_{\mathrm{f}}$, $k_{\mathrm{i}} \leftrightarrow k'_{\mathrm{f}}$. Si l'on choisit les trois variables indépendantes $z = \overset{0}{q}_{\mathrm{f}} + \overset{0}{k}_{\mathrm{f}}$, $z' = \overset{0}{q}_{\mathrm{i}} + \overset{0}{k}_{\mathrm{i}}$ et E l'énergie totale, il résulte alors des formules (IV.20) et (IV.22) que la fonction ϖ (ou $\tilde{\varpi}$) dépend symétriquement des variables z et z' ; nous la noterons désormais $\tilde{\varpi}(z, z', E)$. En revenant à la formule (IV.30) on posera donc $k_{\mathrm{i}} = E - z'$; les deux termes de la première intégrale de la seconde ligne de (IV.30) peuvent être rassemblés en un seul, grâce au changement de variable $a \to E + m_{\mathbf{N}} - a$ effectué dans le second et l'on obtient

$$\tilde{\varpi}(z, z', E) = -\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int \frac{da}{a - z} S'(a)\, S'(E + m_{\mathbf{N}} - a) \times \tag{IV.31}$$

$$\times \left(\frac{1}{a-z'} - \frac{1}{a-m_{\mathbf{N}}-E+z'}\right) - \frac{2\,(2\pi)^6}{D^+(E)} \int \mathrm{d}a\, \frac{S'(a)\,S'(E+m_{\mathbf{N}}-a)}{a-z} \times$$
$$\times \int \mathrm{d}a\, \frac{S'(a)\,S'(E+m_{\mathbf{N}}-a)}{a-z'}.$$

Le premier terme de (IV.31) peut être écrit sous une forme d'aspect plus symétrique ; on a aussi la formule

$$\text{(IV.32)} \qquad \widetilde{\varpi}(z,z',E) = -\frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}} \int \mathrm{d}a\, \frac{S'(a)\,S'(E+m_{\mathbf{N}}-a)}{(a-z)\,(a-z')} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}}\,\frac{1}{z+z'-m_{\mathbf{N}}-E} \int \mathrm{d}a\, S'(a)\,S'(E+m_{\mathbf{N}}-a) \left(\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a-z'}\right) -$$
$$- \frac{2\,(2\pi)^6}{D^+(E)} \int \mathrm{d}a\, \frac{S'(a)\,S'(E+m_{\mathbf{N}}-a)}{a-z} \int \mathrm{d}a\, \frac{S'(a)\,S'(E+m_{\mathbf{N}}-a)}{a-z'}.$$

Dans le domaine physique les variables z et z' ont une partie imaginaire positive. Les formules (IV.31) et (IV.32) sont encore valables si Z est nul, à condition de supprimer les termes qui contiennent la fonction $D^+(E)$ en dénominateur et de remplacer S' par S'_1.

3. Amplitudes de diffusion. — A) Diffusion $\mathbf{N\theta\theta} \to \mathbf{N\theta\theta}$. — L'élément de matrice $\boldsymbol{S}$ est donné par les formules (IV.16), (IV.20) et (IV.22) ; avec la notation introduite en (IV.31) il s'écrit

$$\text{(IV.33)} \quad M(q_\mathrm{i},k_\mathrm{i},k'_\mathrm{i}\,;q_\mathrm{f},k_\mathrm{f},k'_\mathrm{f}) = 2\,\mathbf{i}\,\pi^3\,g^4\,\frac{f(\omega_{k_\mathrm{i}})\,f(\omega_{k'_\mathrm{i}})\,f(\omega_{k_\mathrm{f}})\,f(\omega_{k'_\mathrm{f}})}{\sqrt{\omega_{k_\mathrm{i}}\,\omega_{k'_\mathrm{i}}\,\omega_{k_\mathrm{f}}\,\omega_{k'_\mathrm{f}}}}\,\delta^{(4)}(P_\mathrm{i}-P_\mathrm{f}) \times$$
$$\times \Big[\varpi(\underset{0}{q_\mathrm{f}}+\underset{0}{k_\mathrm{f}},\underset{0}{q_\mathrm{i}}+\underset{0}{k'_\mathrm{i}},E) + \varpi(\underset{0}{q_\mathrm{f}}+\underset{0}{k_\mathrm{f}},\underset{0}{q_\mathrm{i}}+\underset{0}{k_\mathrm{i}},E) +$$
$$+ \varpi(\underset{0}{q_\mathrm{f}}+\underset{0}{k'_\mathrm{f}},\underset{0}{q_\mathrm{i}}+\underset{0}{k'_\mathrm{i}},E) + \varpi(\underset{0}{q_\mathrm{f}}+\underset{0}{k'_\mathrm{f}},\underset{0}{q_\mathrm{i}}+\underset{0}{k_\mathrm{i}},E)\Big].$$

L'amplitude physique s'obtient en posant $\underset{0}{q_\mathrm{i}} = \underset{0}{q_\mathrm{f}} = m_{\mathbf{N}}$ et $k_0 = \omega_k$ pour chaque méson ; l'expression précédente se simplifie considérablement du fait que la particule $\mathbf{N}$ est statique. Dans la somme des deux premiers termes de (IV.33), par exemple, les termes provenant de la première ligne de (IV.31) font intervenir des différences du type

$$\frac{1}{a-m_{\mathbf{N}}-\omega_{k_\mathrm{i}}-\mathbf{i}\,\varepsilon} - \frac{1}{a-m_{\mathbf{N}}-\omega_{k_\mathrm{i}}+\mathbf{i}\,\varepsilon} = 2\pi\,\mathbf{i}\,\delta(a-m_{\mathbf{N}}-\omega_{k_\mathrm{i}}),$$

ce qui permet d'effectuer l'intégration sur a ; les termes qui proviennent de la seconde ligne de (IV.31) se simplifient de façon analogue en remarquant que l'on a

$$\int \mathrm{d}a\, \frac{S'(a)\,S'(E+m_{\mathbf{N}}-a)}{a-m_{\mathbf{N}}-\omega_{k_\mathrm{i}}-\mathbf{i}\,\varepsilon} = -\int \mathrm{d}a\, \frac{S'(a)\,S'(E+m_{\mathbf{N}}-a)}{a-m_{\mathbf{N}}-\omega_{k'_\mathrm{i}}+\mathbf{i}\,\varepsilon}.$$

Après quelques calculs on obtient finalement pour l'amplitude physique

$$\text{(IV.34)} \quad M(q_\mathrm{i},k_\mathrm{i},k'_\mathrm{i}\,;q_\mathrm{f},k_\mathrm{f},k'_\mathrm{f}) = 4\,\pi^4\,g^4\,\frac{f(\omega_{k_\mathrm{i}})\,f(\omega_{k'_\mathrm{i}})\,f(\omega_{k_\mathrm{f}})\,f(\omega_{k'_\mathrm{f}})}{\sqrt{\omega_{k_\mathrm{i}}\,\omega_{k'_\mathrm{i}}\,\omega_{k_\mathrm{f}}\,\omega_{k'_\mathrm{f}}}}\,\delta(\vec{P}_\mathrm{i}-\vec{P}_\mathrm{f}) \times$$
$$\times \Big\{ S'(m_{\mathbf{N}}+\omega_{k_\mathrm{i}})\,S'(m_{\mathbf{N}}+\omega_{k'_\mathrm{i}})\,\big[\delta(\omega_{k_\mathrm{i}}-\omega_{k_\mathrm{f}})\,\delta(\omega_{k'_\mathrm{i}}-\omega_{k'_\mathrm{f}}) +$$

$$+ \delta(\omega_{k_i} - \omega_{k'_f})\,\delta(\omega_{k'_i} - \omega_{k_f})\Big] + \frac{2\,\mathbf{i}\,(2\pi)^7}{D^+(E)}\,S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k_i})\,S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k'})\,\times$$

$$\times\,S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k_f})\,S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k'_f})\,\delta(\omega_{k_i} + \omega_{k'_i} - \omega_{k_f} - \omega_{k'})\Big\}.$$

Les deux premiers termes de cette expression correspondent à une diffusion élastique dans laquelle chaque méson conserve son énergie. Ce sont les seuls termes qui subsistent dans le cas où la particule **V** est composée ; ce fait est en rapport avec les pathologies du modèle déjà discutées à la fin du chapitre III.

B) Production $\mathbf{V\theta} \to \mathbf{N\theta\theta}$. — Les diagrammes pour cette réaction se déduisent simplement des diagrammes $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ en supprimant les deux lignes incidentes d'impulsions q_i et k_i et en remplaçant le propagateur de la particule **V**, qui est connecté à ces lignes, par une ligne externe d'impulsion p_i. A part les facteurs cinématiques, on obtiendra la valeur de ces diagrammes en divisant la fonction $\varpi(q_f + k_f, p_i, E)$ par le propagateur $S'(p_i)$; dans le domaine physique cette opération équivaut à prendre le résidu de $\varpi(q_f + k_f, z', E)$ au pôle $z' = m_{\mathbf{V}}$. En tenant compte de la symétrie par rapport à k_f et k'_f on obtient ainsi l'élément de matrice

$$(\text{IV}.35)\qquad M(p_i, k_i\,;\, q_f, k_f, k'_f) = \frac{1}{2}\,g^3\,\sqrt{\pi}\,\frac{f(\omega_{k_i})\,f(\omega_{k_f})\,f(\omega_{k'_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\,\omega_{k_f}\,\omega_{k'_f}}}\,\delta^{(4)}(P_i - P_f)\,\times$$

$$\times\,\frac{1}{S'(\underset{0}{p_i})}\Big[\varpi(\underset{0}{q_f} + \underset{0}{k_f}, \underset{0}{p_i}, E) + \varpi(\underset{0}{q_f} + \underset{0}{k'_f}, \underset{0}{p_i}, E)\Big].$$

La détermination de l'amplitude physique demande le calcul du résidu de $\tilde{\varpi}(z, z', E)$ au point $z' = m_{\mathbf{V}}$ ou, ce qui revient au même, en permutant les variables, au point $z = m_{\mathbf{V}}$. Pour ce calcul il sera commode de prendre la première ligne de (IV.31) sous la forme (IV.28) et d'écrire, pour la seconde ligne de (IV.31), en notant que $\mathrm{Im}z > 0$,

$$\int \mathrm{d}a\,\frac{S'(a)\,S'(E + m_{\mathbf{N}} - a)}{a - z} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}a\,\frac{\rho(a)\,S'(E + m_{\mathbf{N}} - a)}{a - z}\,.$$

La partie principale de $\tilde{\varpi}$ au pôle $z = m_{\mathbf{V}}$ est évidemment obtenue en remplaçant la fonction spectrale $\rho(a)$ par sa partie discrète ; on trouve, pour cette partie principale, l'expression

$$(\text{IV}.36)\qquad \frac{S'(E + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}{z - m_{\mathbf{V}}}\left[\frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{z' - m_{\mathbf{V}}} + \frac{1}{z' + m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}} - E}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\,(2\pi)^3}{D^+(E)}\int \mathrm{d}a\,\frac{S'(a)\,S'(E + m_{\mathbf{N}} - a)}{a - z'}\right].$$

En combinant les deux termes qui figurent dans (IV.35) on trouve que la partie du résidu qui ne contient pas $D^+(E)$ disparaît et il reste [15]

[15] L'amplitude physique de la production ainsi que celle de la diffusion élastique $\mathbf{V\theta}$ ont déjà été obtenues, pour le modèle de Lee, par R. D. Amado, à l'aide de méthodes inspirées des relations de dispersion [19]. Les résultats ont été utilisés par R. P. Kenschaft & R. D. Amado [20] pour obtenir, dans un cas particulier, une solution de l'équation étudiée ici directement (cf. appendice).

(IV.37) $$M(p_i, k_i ; q_f, k_f, k'_f) = g^3 (2\pi)^8 \sqrt{\pi}\, \frac{f(\omega_{k_i})\, f(\omega_{k_f})\, f(\omega_{k'_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\, \omega_{k_f}\, \omega_{k'_f}}} \times$$

$$\times\, \delta^{(4)}(P_i - P_f)\, \frac{1}{D^+(E)}\, S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k_i})\, S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k_f})\, S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k'_f}) .$$

L'absence de termes ne contenant pas $D^+(E)$ signifie que l'amplitude de production est nulle dans le modèle où la particule **V** est composée. Ce qui précède permet de voir que l'annulation de ces termes provient d'une compensation qui survient lors de la symétrisation par rapport aux deux mésons sortants et qui, d'autre part, n'a lieu que pour des particules sur leur couche de masse. Cette propriété est mathématiquement liée au fait que, dans le domaine physique, la symétrisation consiste à ajouter les deux termes $\widetilde{\varpi}(z^+, z', E)$ et $\widetilde{\varpi}(E + m_{\mathbf{N}} - z^-, z', E)$ tandis que cette somme est, au moins en ce qui concerne la partie réelle, donnée par une formule telle (A.12) qui ne comporte aucun pôle en z' si la constante q est nulle, c'est-à-dire dans le cas de la particule **V** composée.

L'équation (A.12) est néanmoins difficile à interpréter physiquement ; il est possible qu'une étude plus détaillée des propriétés analytiques de la fonction $\widetilde{\varpi}$ des deux variables complexes z et z' puisse fournir une explication plus satisfaisante ainsi qu'une interprétation de (A.12).

Quoi qu'il en soit, ces propriétés apparaissent bien ici comme une conséquence du comportement asymptotique du propagateur c'est-à-dire en définitive de la valeur de la constante de renormalisation Z.

C) Diffusion $\mathbf{V\theta} \to \mathbf{V\theta}$. — Les diagrammes se déduisent encore des précédents par une opération sur les lignes sortantes, analogue à celle qui vient d'être effectuée sur les lignes entrantes. On obtient pour l'élément de matrice

(IV.38) $$M(p_i, k_i ; p_f, k_f) = -\frac{\mathbf{i}\, g^2}{8\pi^2}\, \frac{f(\omega_{k_i})\, f(\omega_{k_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\, \omega_{k_f}}}\, \delta^{(4)}(P_i - P_f)\, \frac{\varpi(p_f, p_i, E)}{S'(p_i)\, S'(p_f)} .$$

On obtiendra l'élément de matrice dans le domaine physique en extrayant de l'expression (IV.36) la partie principale au pôle $z' = m_{\mathbf{V}}$; celle-ci est donnée par la formule

(IV.39) $$\frac{S'(E + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}{(z - m_{\mathbf{V}})\, (z' - m_{\mathbf{V}})} \left[\frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4} - \frac{2}{D^+(E)}\, S'(E + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}) \right] .$$

L'élément de matrice physique est

(IV.40) $$M(p_i, k_i ; p_f, k_f) = -2\pi^2 g^2\, \frac{f(\omega_{k_i})\, f(\omega_{k_f})}{\sqrt{\omega_{k_i}\, \omega_{k_f}}}\, \delta^{(4)}(P_i - P_f) \times$$

$$\times \left[S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k_i}) + \frac{2\,\mathbf{i}\,(2\pi)^4}{D^+(E)}\, S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k_i})\, S'(m_{\mathbf{N}} + \omega_{k_f}) \right] .$$

Dans le cas où la particule **V** est composée on retrouve bien l'expression déjà établie en (III.35) par les méthodes de la théorie formelle de la diffusion. Ici encore, si l'on tient compte des propriétés de la fonction $D(E)$, qui ont été établies au chapitre III, on trouve que cet élément de matrice est la limite, quand Z tend vers 0, de l'élément de matrice du modèle de Lee.

Nous terminerons par quelques remarques, concernant les pôles en E de l'amplitude $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta} \to \mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta}$, qui illustrent le caractère singulier de la limite $Z \to 0$. L'amplitude pour des particules hors de leur couche de masse dépend de trois paramètres, soit z, z' et E ; elle s'obtient à partir de (IV.38) en supprimant les facteurs cinématiques et s'écrit

$$M(z, z', E) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{\varpi(z, z', E)}{S'(z)\,S'(z')}. \tag{IV.41}$$

Pour des particules externes sur leur couche de masse, l'amplitude ne dépend plus que de l'énergie totale E et est donnée par

$$M(E) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{(2\pi)^4}{\mathbf{i}}\,S'(E + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}}) \times \times \left[1 + 2\,\mathbf{i}\,(2\pi)^4\,\frac{S'(E + m_{\mathbf{N}} - m_{\mathbf{V}})}{D^+(E)}\right]. \tag{IV.42}$$

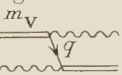
Cas $Z = 0$. — L'amplitude se réduit au premier terme de (IV.42), le second terme tendant vers 0 quand $Z \to 0$. Le pôle est situé à la masse $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ de l'état lié $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta}$ et son résidu est $-\,g_1^2/4\pi$.

Cas $Z \neq 0$. — L'amplitude possède cette fois deux pôles, bien que le système $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta}$ ne comporte qu'un état lié dont la masse $m_{\mathbf{W}}$ est donnée par $D(m_{\mathbf{W}}) = 0$. Le pôle $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ subsiste encore ; son résidu est, avec les notations du chapitre III [équation (III.22)], donné par la formule

$$-\frac{g^2}{4\pi}\left[1 - \frac{2}{d(2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}})}\right] = +\frac{g^2}{4\pi}.$$

Ce résidu est opposé à celui de l'amplitude limite. En fait la contribution au pôle $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ du deuxième terme de (IV.42) disparaît dans la limite $Z \to 0$. Ce terme possède en effet les deux pôles $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ et $m_{\mathbf{W}}$; il est analytique au voisinage de $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ et tend vers 0 quand $Z \to 0$; son intégrale sur une petite circonférence fixe entourant le point $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ tend donc vers 0 et, par suite, il en est de même de la somme de ses résidus. On en déduit que le résidu au pôle $m_{\mathbf{W}}$ tend, quand $Z \to 0$, vers $-\,2\,(g_1^2/4\pi)$ tandis que $m_{\mathbf{W}} \to 2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ [16].

La présence dans l'amplitude du pôle $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$, qui ne correspond à aucun état lié du système $\mathbf{V}\,\boldsymbol{\theta}$ si Z est différent de 0, s'explique par le caractère statique des particules $\mathbf{N}$ et $\mathbf{V}$; en effet, dans le diagramme d'échange suivant

$\underset{\rightarrow}{E}$ 

, (IV.43)

la valeur de l'énergie échangée q_0 est entièrement déterminée par l'énergie totale incidente et vaut $q_0 = 2\,m_{\mathbf{V}} - E$; le propagateur de la particule $\mathbf{N}$ échangée, qui est proportionnel à $1/(q_0 - m_{\mathbf{N}} + \mathbf{i}\,\varepsilon)$, donne donc dans l'amplitude un terme qui possède un pôle en E. La contribution du diagramme (IV.43) à l'amplitude est, dans les deux modèles F et Y, donnée par l'expression $g^2/4\pi\,(E + m_{\mathbf{N}} - 2\,m_{\mathbf{V}})$. Son résidu au point $2\,m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ est $g^2/4\pi$; il est égal au résidu de l'amplitude totale du modèle Y, de sorte que le diagramme (IV.43) explique complètement ce pôle supplémentaire.

[16] Ce fait a déjà été mentionné par M. T. Vaughn, R. Aaron & R. D. Amado [5].

On résout ainsi un paradoxe qui se présente au sujet de la constante de couplage $\mathbf{W\,V\,\theta}$; dans le modèle F, le résidu de l'amplitude $\mathbf{V\,\theta} \to \mathbf{V\,\theta}$ au pôle de la particule $\mathbf{W}'$ vaut $-g_1^2/4\pi$; il diffère de la limite du résidu au pôle $m_{\mathbf{W}}$ dans le modèle Y, qui vaut $-2(g_1^2/4\pi)$. Cette différence disparaît si l'on prend soin de retrancher la valeur du diagramme (IV.43) de l'amplitude $\mathbf{V\,\theta} \to \mathbf{V\,\theta}$ dans les deux modèles. Par suite, la valeur correcte du résidu relatif à l'état lié $\mathbf{W}'$ est $-2(g_1^2/4\pi)$.

Il est remarquable que le pôle supplémentaire $2m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ disparaisse pour l'amplitude hors de couche (IV.41). En effet, si l'on fixe z et z' à des valeurs non physiques (différant de $m_{\mathbf{V}}$), on voit sur (IV.28) que l'on obtiendra les pôles en E de $\tilde{\varpi}$, indépendants de z et z', en remplaçant d'abord dans cette formule la fonction spectrale par sa partie discrète. On est donc amené à rechercher les pôles de l'expression (IV.36) plutôt que de (IV.39). Le résidu de cette quantité au pôle $2m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ est alors

$$\frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{z - m_{\mathbf{V}}}\left[\frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{z' - m_{\mathbf{V}}} + \frac{1}{z' - m_{\mathbf{V}}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{d(2m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}})}\,\frac{\mathbf{i}}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{z' - m_{\mathbf{V}}}\right] = 0\,.$$

Dans le calcul qui précède, le deuxième terme de l'expression entre parenthèses qui figure dans (IV.36) apporte une contribution alors qu'il disparaît de l'amplitude si l'on donne à z' sa valeur physique. Néanmoins ce terme correspond à la présence, dans l'amplitude hors de couche, d'un pôle en E qui dépend de la valeur des deux autres variables z, z' et dont l'explication physique est encore donnée par le diagramme (IV.43).

3. **Discussion.** — Les résultats du paragraphe précédent appellent quelques remarques et suggèrent de nouveaux sujets d'étude.

La méthode que l'on vient d'utiliser pour le calcul de la somme des diagrammes en échelle de la diffusion $\mathbf{V\,\theta}$ montre les conséquences que peut entraîner le comportement asymptotique des propagateurs pour la détermination des amplitudes de diffusion ; la limite asymptotique de l'amplitude (IV.42), qui, en fin de compte, est déterminée par les formules (IV.27), dépend de la valeur de Z et est égale à une constante nulle ou non nulle suivant que la particule $\mathbf{V}$ est élémentaire ou composée. Par ailleurs, le rôle joué par la constante Z dans la résolution de l'équation (A.21) est crucial et son annulation apporte des changements importants dans la forme de la solution.

Toutefois, l'équation intégrale qui est étudiée dans l'appendice semble exclusivement liée au modèle de Lee. La relation de symétrie (A.12), dont le sens physique reste obscur, y joue un rôle prépondérant.

D'autres propriétés rencontrées ici sont liées au caractère statique des particules $\mathbf{V}$ et $\mathbf{N}$; il en est ainsi, par exemple, de la présence du pôle additionnel $2m_{\mathbf{V}} - m_{\mathbf{N}}$ dans l'amplitude physique de la diffusion $\mathbf{V\,\theta} \to \mathbf{V\,\theta}$ pour le modèle où Z est différent de 0, ainsi que de la disparition de l'amplitude de production, dans le domaine physique, pour $Z = 0$. Ces différences qui s'introduisent entre le domaine physique, et le domaine non physique, où les variables z, z' et E sont quelconques, sont dues au fait que les pôles de la fonction $\tilde{\varpi}$ dans l'une des variables, E par exemple, ne

sont pas tous indépendants des variables restantes. On peut conclure à l'utilité d'une étude des propriétés analytiques de $\widetilde{\varpi}$. Cependant, une extension au cas relativiste, où les particules externes sont toujours considérées sur leur couche de masse, semble à priori difficile.

Le secteur $\mathbf{V}\,\theta \prec\succ \mathbf{N}\,\theta\,\theta$ du modèle de Lee fournit d'autre part un exemple d'une particule composée de type échelle. Dans le cadre de la théorie quantique des champs, il ne semble pas que ces particules puissent être traitées de la même façon que les particules du type chaîne ([17]). En effet, le problème de trouver un modèle de particule élémentaire équivalent se présente différemment. Tandis que dans le cas des particules du type chaîne on remplace une interaction de Fermi par une interaction de Yukawa, il n'est pas possible de supprimer l'interaction produite par l'échange d'une particule, qui conduit aux diagrammes en échelle, pour la remplacer par un couplage de Yukawa entre la particule composée et ses constituants ; il semble qu'on doive plutôt ajouter un nouveau terme d'interaction au lagrangien initial.

Des problèmes de ce genre ont déjà été considérés par M. A. Braun [21] qui démontre que les résultats d'une théorie de la particule composée du type échelle ne sont pas changés par l'introduction d'une nouvelle particule élémentaire couplée aux deux constituants, pourvu que sa masse soit choisie égale à la masse du pôle qui apparaît dans les diagrammes en échelle. Il serait intéressant de voir si l'exemple que peut fournir le modèle de Lee permet d'apporter de nouvelles informations sur cette question.

Dans un autre ordre d'idées, on peut envisager d'étendre le calcul de l'amplitude de diffusion $\mathbf{V}\,\theta$ au cas où la particule $\mathbf{V}$ est instable. Il serait sans doute possible d'éclairer ainsi la définition théorique des amplitudes de diffusion qui font intervenir des particules instables.

CONCLUSION

Les résultats qui viennent d'être exposés peuvent être rattachés à deux directions de recherche qui ont pour but :

a) la démonstration de l'équivalence entre une particule composée du type chaîne et une particule élémentaire dont la constante de renormalisation est nulle ;

b) la découverte de tests expérimentaux d'élémentarité.

En ce qui concerne le premier point nous avons, outre l'étude explicite des secteurs $\mathbf{V} \prec\succeq \mathbf{N}\,\theta$ et $\mathbf{V}\,\theta \prec\succ \mathbf{N}\,\theta\,\theta$ du modèle de Lee, complété les résultats obtenus en théorie des perturbations par B. Jouvet [1] ([18]), en considérant les processus dans lesquels la particule composée est réelle. Il apparaît que, dans un calcul de diagrammes quelconque, une particule du type chaîne peut être traitée de la même façon qu'une particule élémentaire grâce à une définition convenable de son propagateur et de sa fonction de vertex avec ses constituants.

([17]) Toutefois, on peut faire à ce propos une remarque relative aux modèles étudiés ici : dans le modèle où Z est nul, les amplitudes physiques des diffusions élastiques $\mathbf{N}\,\theta$ et $\mathbf{V}\,\theta$, quoique étant respectivement des types chaîne et échelle, sont égales.

([18]) Beaucoup d'auteurs se sont, depuis, intéressés à ce problème de l'équivalence à des points de vue divers [5, 17, 22 à 25].

Dans l'exemple traité du modèle de Lee on a montré que, au moins en ce qui concerne le propagateur, les particules élémentaire et composée peuvent être distinguées. Ceci amène à conclure que la recherche des tests peut prendre pour base l'étude des propagateurs et des vertex associés aux particules composées.

Une caractéristique importante de ces deux fonctions est donnée par leur comportement asymptotique, qui a été examiné ici dans le cas du propagateur du modèle de Lee. Il est naturel que ce comportement asymptotique influence celui des amplitudes de diffusion comme cela a été montré pour les diffusions **N θ** et **V θ**.

Par ailleurs, les comportements asymptotiques des amplitudes qui font intervenir des particules composées sont reliés au commutateur à temps égaux des relations de dispersion. Très généralement, ce dernier doit donner une contribution dès qu'une particule composée entre en jeu et non seulement quand celle-ci est transmise dans la voie d'entrée comme c'est le cas de la diffusion **N θ**. En particulier, la particule composée peut faire partie des particules entrantes ou sortantes (diffusion **V θ** par exemple). La raison générale qui explique la présence d'un tel commutateur se trouve dans le fait que les grandeurs dynamiques attachées à la particule composée sont fonctions de celles qui définissent ses constituants.

APPENDICE

Résolution d'une équation intégrale

1. **Enoncé du problème.** — La donnée essentielle est une fonction de variable complexe $\beta(z)$ supposée de la forme

$$\beta(z) = A(z) + B(z) \int_{\mu}^{\infty} d\omega \, \frac{F(\omega)}{\omega - z} \tag{A.1}$$

et satisfaisant aux conditions suivantes [19] :

a) A et B sont des polynômes ;

b) $\mu > 0$, $\int d\omega \, \frac{F(\omega)}{\omega} < \infty$;

c) $\beta(z)$ ne possède pas de zéro.

Les fonctions $\beta(z)$ et $1/\beta(z)$ sont holomorphes dans le complémentaire de la coupure $[\mu, \infty[$ et le saut de $\beta(z)$ sur la coupure est donné par la formule

$$\beta^{+}(\omega) - \beta^{-}(\omega) = 2\pi \mathbf{i} \, B(\omega) \, F(\omega) , \qquad \omega > \mu . \tag{A.2}$$

L'équation à résoudre s'écrit

$$T(\omega) = \frac{1}{P(M-\omega)\,\beta(M-\omega)} \times \left\{ R(\omega) - \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \, \frac{P(\omega')}{\omega' + \omega - M} \left[\beta^{+}(\omega') - \beta^{-}(\omega') \right] T(\omega') \right\} , \tag{A.3}$$

[19] Les conditions *a*) à *e*) ne sont sans doute pas les plus générales que l'on puisse poser. Elles ont l'avantage de simplifier la résolution et sont suffisantes pour les applications envisagées ici. En particulier, on peut se débarrasser facilement de la condition *d*) dont le seul but est d'éviter l'intervention de pôles multiples.

où $T(\omega)$ est la fonction inconnue, définie pour $\omega > \mu$ et où l'on fait les hypothèses :

d) P est un polynôme dont les zéros $\{a_i\}$ sont simples et situés en dehors des demi-droites $]M - \infty, M - \mu]$ et $[\mu, \infty[$; R est une fraction rationnelle dont les pôles $\{b_k\}$ possèdent les mêmes propriétés que les zéros de P ; on suppose en outre que les zéros des polynômes $P(z)$ et $P(M - z)$ et les pôles de $R(z)$ et $R(M - z)$ sont tous distincts ;

e) $|R(z)| \underset{|z|\to\infty}{\to} 0$ et $|P(z)\,\beta(z)| > m > 0$ pour $|z| > m' > 0$;

f) on suppose pour l'instant que l'une des deux conditions suivantes est réalisée : $\mathrm{Im}M \neq 0$ ou $M < 2\,\mu$.

2. **Solution.** — La résolution de l'équation (A.3) dans laquelle l'intégrale du second membre est supposée convergente est équivalente à la recherche d'une fonction analytique $T(z)$ vérifiant l'équation

$$T(z) = \frac{1}{P(M - z)\,\beta(M - z)} \times \times \left[R(z) - \frac{1}{2\,\pi\,\mathbf{i}} \int_{\mu}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{P(\omega)}{\omega + z - M} \left[\beta^{+}(\omega) - \beta^{-}(\omega)\right] T(\omega) \right]. \tag{A.4}$$

On voit tout d'abord que $T(z)$ doit être méromorphe dans le complémentaire de la coupure $]M - \infty, M - \mu]$ et admettre comme pôles simples les points $\{M - a_i\}$ et $\{b_k\}$.

Les hypothèses *e*) et l'équation (A.4) entraînent la propriété asymptotique

$$P(M - z)\,\beta(M - z)\,T(z) \underset{|z|\to\infty}{\to} 0$$

et donc aussi

$$T(z) \underset{|z|\to\infty}{\to} 0\,. \tag{A.5}$$

Ces relations n'entraînent pas nécessairement que $P(z)\,\beta(z)\,T(z)$ tende asymptotiquement vers 0 mais il résulte de la forme de la fonction $\beta(z)$ que l'on a au moins

$$\frac{1}{z}\,P(z)\,\beta(z)\,T(z) \underset{|z|\to\infty}{\to} 0\,. \tag{A.6}$$

On pose

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{2\,\pi\,\mathbf{i}} \left[T^{+}(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M) - T^{-}(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)\right], \quad \omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M \in\,]M - \infty, M - \mu]\,. \tag{A.7}$$

En intégrant par rapport à u la fonction $\dfrac{1}{2\,\pi\,\mathbf{i}}\,\dfrac{T(u)}{u - z}$ le long du contour de la figure 13, on obtient alors immédiatement, d'après (A.5), (A.7) et (A.4) [20],

$$T(z) = \sum_k \frac{R_k}{P(M - b_k)\,\beta(M - b_k)\,(z - b_k)} + + \sum_i \frac{r_i}{z + a_i - M} + \int_{-\infty}^{\mathrm{Re}(M-\mu)} \mathrm{d}\omega\, \frac{\Delta(\omega)}{\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M - z}, \tag{A.8}$$

où R_k désigne le résidu de $R(z)$ au point b_k et r_i la quantité

[20] On exclut le cas où des singularités seraient présentes sur la coupure. En particulier l'intégrale sur la petite circonférence de la figure 13 tend vers 0.

$$(A.9)\qquad r_i = \frac{-1}{P'(a_i)\,\beta(a_i)} \left\{ R(M-a_i) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\mu^{\infty} d\omega \, \frac{P(\omega)}{\omega - a_i} \left[\beta^+(\omega) - \beta^-(\omega)\right] T(\omega) \right\}.$$

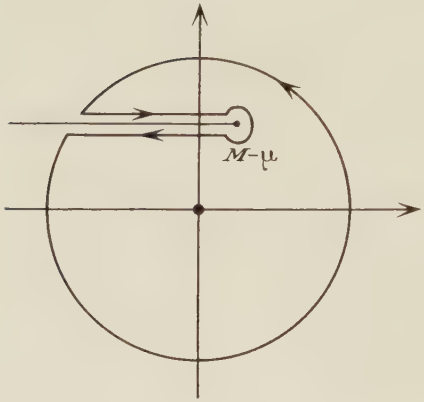


Fig. 13.

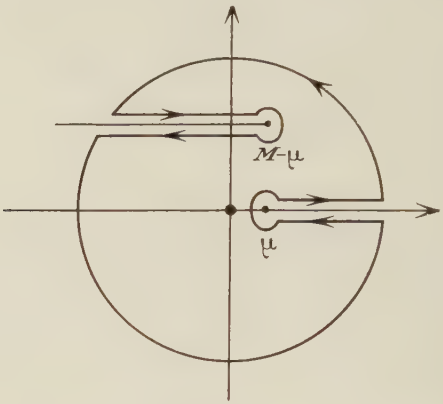


Fig. 14.

Si l'on intègre maintenant la fonction $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \frac{P(u)\,\beta(u)\,T(u)}{u\,(u+z-M)}$ sur le contour de la figure 14, on trouve, après utilisation de la condition d) et des formules (A.6) et (A.8),

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\mu^{\infty} d\omega \, \frac{P(\omega)}{\omega} \frac{\beta^+(\omega) - \beta^-(\omega)}{\omega + z - M} T(\omega) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\mathrm{Re}(M-\mu)} d\omega \, \frac{P(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)}{\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M} \frac{\beta(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)}{\omega + z - \mathrm{Re}M} \Delta(\omega) =$$
$$= \frac{P(M-z)\,\beta(M-z)\,T(M-z)}{M-z} + \frac{P(0)\,\beta(0)\,T(0)}{z-M} +$$
$$+ \sum_i r_i \frac{P(M-a_i)\,\beta(M-a_i)}{(M-a_i)\,(z-a_i)} + \sum_k \frac{P(b_k)\,\beta(b_k)}{P(M-b_k)\,\beta(M-b_k)} \frac{R_k}{b_k\,(b_k+z-M)}.$$

La première intégrale du membre de gauche se transforme facilement grâce à l'identité

$$\frac{1}{\omega\,(\omega+z-M)} = \frac{1}{z-M} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+z-M} \right).$$

On en tire aussitôt, à l'aide de l'équation (A.4),

$$(A.10)\qquad P(M-z)\,\beta(M-z)\left[T(z) + T(M-z)\right] =$$
$$= R(z) - R(M) + P(0)\,\beta(0)\left[T(M) + T(0)\right] +$$
$$+ (z-M) \sum_i r_i \frac{P(M-a_i)\,\beta(M-a_i)}{(M-a_i)\,(z-a_i)} +$$
$$+ (z-M) \sum_k \frac{P(b_k)\,\beta(b_k)}{P(M-b_k)\,\beta(M-b_k)} \frac{R_k}{b_k\,(b_k+z-M)} -$$
$$- (z-M) \int_{-\infty}^{\mathrm{Re}(M-\mu)} d\omega \, \frac{P(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)\,\beta(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)}{(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)\,(\omega + z - \mathrm{Re}M)} \Delta(\omega).$$

On a supposé ici que ni l'origine, ni le point M ne coïncident avec l'une des singularités des diverses fonctions qui interviennent ; s'il n'en est pas ainsi on peut évaluer l'intégrale qui précède avec un point de soustraction différent de l'origine sans que les résultats qui suivent en soient affectés.

L'équation (A.10) est de la forme

$$T(z) + T(M - z) = \frac{1}{P(M - z)\,\beta(M - z)}\,\chi(z)\,, \tag{A.11}$$

où la fonction $\chi(z)$ est méromorphe dans le complémentaire de la coupure $[\mu, \infty[$ et possède les pôles simples $\{a_i\}$, $\{b_k\}$, $\{M - b_k\}$. Le changement de variable $z \to M - z$ effectué dans (A.11) conduit à

$$P(z)\,\beta(z)\,\chi(z) = P(M - z)\,\beta(M - z)\,\chi(M - z)\,.$$

Le premier membre de cette équation est méromorphe dans le complémentaire de la coupure $[\mu, \infty[$ tandis que le second l'est dans le complémentaire de $]M - \infty, M - \mu]$. Ces deux coupures n'ont aucun point commun d'après f) ; il en résulte que la fonction $P(z)\,\beta(z)\,\chi(z)$ est méromorphe dans tout le plan ; ses pôles sont les pôles simples $\{b_k\}$ et $\{M - b_k\}$.

La formule (A.11) peut donc s'écrire

$$T(z) + T(M - z) = \frac{1}{\beta(z)\,\beta(M - z)}\,t(z)\,, \tag{A.12}$$

où l'on a posé

$$t(z) = \frac{1}{P(z)\,P(M - z)}\left[\sum_k \left(\frac{\alpha_k}{z - b_k} + \frac{\beta_k}{z + b_k - M}\right) + Q(z)\right] \tag{A.13}$$

et où $Q(z)$ désigne une fonction entière. Il résulte des formules (A.5) et (A.6) que cette dernière se réduit nécessairement à un polynôme qui vérifie les relations

$$\left|\frac{Q(z)}{P(z)\,\beta(z)\,P(M - z)\,\beta(M - z)}\right| \underset{|z|\to\infty}{\to} 0\,, \qquad \left|\frac{Q(z)}{z\,P(z)\,\beta(z)}\right| \underset{|z|\to\infty}{\to} 0\,. \tag{A.14}$$

Suivant les cas c'est l'une ou l'autre de ces formules qui sera la plus restrictive.

La symétrie du premier membre de (A.12) entraîne les relations

$$\beta_k = -\alpha_k\,, \qquad Q(z) = Q(M - z)\,. \tag{A.15}$$

En calculant la partie principale au pôle b_k dans les deux membres de (A.12), on obtient, à l'aide de (A.8) et (A.13),

$$\alpha_k = R_k\,P(b_k)\,\beta(b_k)\,. \tag{A.16}$$

Le même calcul pour le pôle $M - a_i$ donne la valeur de r_i :

$$r_i = \frac{-1}{P'(a_i)}\,\frac{1}{P(M - a_i)\,\beta(M - a_i)\,\beta(a_i)} \times \times \left[\sum_k \alpha_k \left(\frac{1}{M - a_i - b_k} - \frac{1}{b_k - a_i}\right) + Q(a_i)\right]\,. \tag{A.17}$$

La formule (A.12) fournit enfin la fonction $\Delta(\omega)$ définie par (A.7) ; en portant la valeur $z = \omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M \pm \mathbf{i}\,\varepsilon$ avec $\omega < \mathrm{Re}(M - \mu)$ dans cette relation, on obtient, par soustraction des deux relations obtenues, en supposant $t(z) \neq 0$ [21]

[21] La fonction $t(z)$ est nulle si $R(z) = Q(z) = 0$. La formule (A.12) et les hypothèses d) entraînent alors que $T(z)$ est identiquement nulle. La levée des hypothèses d) sera examinée plus loin sur un cas particulier [§ A.4.2, cas a)].

$$\text{(A.18)} \quad \Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \frac{t(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)}{\beta(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)} \left[\frac{1}{\beta^-(\mathrm{Re}M - \omega)} - \frac{1}{\beta^+(\mathrm{Re}M - \omega)} \right].$$

La fonction $T(z)$ cherchée est maintenant déterminée par l'expression (A.8) dans laquelle les diverses quantités qui figurent sont données par les formules (A.13) à (A.18).

Cependant, les raisonnements qui précèdent n'ont qu'un caractère de nécessité et il y a lieu de vérifier que la fonction $T(z)$ ainsi définie est bien la solution de l'équation initiale (A.4).

On établit d'abord, par intégration de la fonction $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \frac{1}{u - z} \frac{t(u)}{\beta(u)\,\beta(M - u)}$ le long du contour de la figure 14, que la relation (A.12) est vérifiée.

En posant

$$\text{(A.19)} \qquad K = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_C \mathrm{d}u \, \frac{P(u)\,\beta(u)\,T(u)}{u + z - M}$$

et en intégrant la fonction $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \frac{P(u)\,\beta(u)\,T(u)}{u + z - M}$ le long du contour de la figure 14, on obtient ensuite

$$K + \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\mu^\infty \mathrm{d}\omega \, \frac{P(\omega)}{\omega + z - M} \left[\beta^+(\omega) - \beta^-(\omega)\right] T(\omega) +$$
$$- \int_{-\infty}^{\mathrm{Re}(M-\mu)} \mathrm{d}\omega \, \frac{P(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)\,\beta(\omega + \mathbf{i}\,\mathrm{Im}M)}{\omega + z - \mathrm{Re}M} \Delta(\omega) =$$
$$= P(M - z)\,\beta(M - z)\,T(M - z) + \text{termes à pôles}.$$

La seconde intégrale du premier membre peut être évaluée en utilisant l'expression (A.18) de $\Delta(\omega)$ et en intégrant la fonction $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \frac{P(u)\,t(u)}{(u + z - M)\,\beta(M - u)}$ le long du contour de la figure 13 ; il s'introduit ainsi la quantité

$$\text{(A.20)} \qquad \begin{aligned} J &= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_C \frac{\mathrm{d}u}{u + z - M} \frac{Q(u)}{P(M - u)\,\beta(M - u)} \\ &= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_C \frac{\mathrm{d}u}{u - z} \frac{Q(u)}{P(u)\,\beta(u)} \end{aligned}$$

et l'on trouve pour l'intégrale considérée la valeur

$$-J + \frac{P(M - z)\,t(M - z)}{\beta(z)} - R(z) + \text{termes à pôles}.$$

En reportant cette expression dans l'équation qui précède et en utilisant la relation (A.12) on trouve finalement

$$T(z) = \frac{1}{P(M - z)\,\beta(M - z)} \left\{ J - K + R(z) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\mu^\infty \mathrm{d}\omega \, \frac{P(\omega)}{\omega + z - M} \left[\beta^+(\omega) - \beta^-(\omega)\right] T(\omega) \right\}.$$

La comparaison de ce résultat à l'équation (A.4) montre que cette dernière n'aura de solution que si la condition nécessaire et suffisante $J - K = 0$ peut être remplie. Cette condition limite le choix du polynôme $Q(z)$ qui est la seule quantité non encore complètement déterminée. La multiplicité des

solutions dépend alors de l'arbitraire qui reste dans la définition de ce polynôme.

3. **Cas limite.** — Les hypothèses *a*) à *e*) restant inchangées, supposons maintenant que la constante M soit réelle et supérieure à $2\,\mu$ et considérons l'équation suivante qui, dans l'hypothèse *f*), se réduit à (A.3)

$$(A.21)\quad T(\omega) = \frac{1}{P(M-\omega)\,\beta^{+}(M-\omega)}\left\{ R(\omega) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}} \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \, \frac{P(\omega')}{\omega' + \omega - M - \mathbf{i}\,\eta} \left[\beta^{+}(\omega') - \beta^{-}(\omega')\right] T(\omega') \right\}.$$

La fonction inconnue $T(\omega)$ est égale à la limite $\hat{T}^{-}(\omega)$ de la fonction analytique $\hat{T}(z)$ solution de l'équation

$$(A.22)\quad \hat{T}(z) = \frac{1}{P(M-z)\,\beta(M-z)}\left\{ R(z) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}} \int_{\mu}^{\infty} d\omega \, \frac{P(\omega)}{\omega + z - M} \left[\beta^{+}(\omega) - \beta^{-}(\omega)\right] \hat{T}^{-}(\omega) \right\}.$$

On est ainsi ramené à une équation de forme analogue à (A.4) mais pour laquelle les deux coupures considérées plus haut ont une partie commune. Néanmoins on obtiendra, sans souci de rigueur, une solution de cette dernière équation en considérant $\hat{T}(z)$ comme la limite, quand η tend vers 0, de la fonction $T_{\eta}(z)$ solution de (A.4) où M est remplacé par $M + \mathbf{i}\,\eta$. Si, en effet, $T_{\eta}(z) \to \hat{T}(z)$ pour z extérieur à l'intervalle $]-\infty,\ M-\mu]$ on aura bien $T_{\eta}(\omega) \to \hat{T}^{-}(\omega)$ en passant formellement à la limite dans les deux membres de (A.4).

On a explicitement

$$(A.23)\quad \hat{T}(z) = \sum_{k} \frac{R_k}{P(M-b_k)\,\beta(M-b_k)\,(z-b_k)} +$$
$$+ \sum_{i} \frac{r_i}{z + a_i - M} + \int_{-\infty}^{M-\mu} d\omega \, \frac{\Delta(\omega)}{\omega - z},$$

les formules (A.13) à (A.17) étant toujours valables et (A.18) étant remplacée par

$$(A.24)\quad \Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi\,\mathbf{i}} \frac{t(\omega)}{\beta^{+}(\omega)} \left[\frac{1}{\beta^{-}(M-\omega)} - \frac{1}{\beta^{+}(M-\omega)} \right].$$

4. **Cas particulier.** — Nous donnons ici les formules complètes dans le cas particulier défini par

$$P(z) = z - a\,, \qquad R(z) = R/(z-b)\,.$$

Les formules seront écrites dans le cas de l'équation (A.21) ; elles sont valables plus généralement quand la constante M est réelle.

1. Cas $R \neq 0$. — Si R est différent de 0 la fonction $t(z)$ n'est jamais nulle et les résultats précédents s'appliquent directement.

A) Expression de la solution. — La solution de l'équation (A.21) est donnée explicitement par les formules suivantes

$$
\text{(A.25)}\quad
\begin{cases}
T(\omega) = \widehat{T}^{-}(\omega)\,, \\
\widehat{T}(z) = \dfrac{R}{(M-a-b)\,\beta(M-b)\,(z-b)} + \dfrac{r}{z+a-M} + \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_{-\infty}^{M-\mu} d\omega\, \frac{\Delta(\omega)}{\omega - z}\,, \\
r = -\dfrac{(b-a)\,\beta(b)}{(M-2a)\,\beta(a)\,\beta(M-a)} \left[\dfrac{R}{M-a-b} - \dfrac{R}{b-a} + q(a)\right], \\
t(z) = -\dfrac{(b-a)\,\beta(b)}{(z-a)\,(z+a-M)} \left[\dfrac{R}{z-b} - \dfrac{R}{z+b-M} + q(z)\right], \\
\Delta(\omega) = \dfrac{1}{2\pi\,\mathbf{i}} \dfrac{t(\omega)}{\beta^{+}(\omega)} \left[\dfrac{1}{\beta^{-}(M-\omega)} - \dfrac{1}{\beta^{+}(M-\omega)}\right],
\end{cases}
$$

le polynôme $q(z)$ étant assujetti aux conditions

$$
q(z) = q(M-z)\,, \qquad \left|\frac{q(z)}{z^2\,\beta(z)\,\beta(M-z)}\right| \underset{|z|\to\infty}{\to} 0\,, \qquad \left|\frac{q(z)}{z^2\,\beta(z)}\right| \underset{|z|\to\infty}{\to} 0\,.
$$

B) Conditions d'existence. — Les formules qui précèdent ne représentent la solution de l'équation (A.21) que si la condition nécessaire et suffisante d'existence $J - K = 0$ est remplie.

Pour exprimer commodément cette condition nous supposerons ici que la fonction $F(\omega)$ qui figure dans la définition de $\beta(z)$ est telle que l'intégrale du second membre de (A.1) se comporte asymptotiquement comme $1/z$ uniformément sur l'argument de z. Cette propriété est réalisée sous des conditions assez larges [8], qui imposent notamment que l'intégrale de $F(\omega)$ soit convergente ; elle est vraie en particulier pour des fonctions de coupure qui se comportent à l'infini comme des puissances de ω. La même hypothèse sera faite sur le comportement asymptotique de l'intégrale qui définit la fonction $\widehat{T}(z)$.

Si m et n sont les degrés respectifs des polynômes $A(z)$ et $B(z)$ on a donc, à un facteur constant près,

$$
\beta(z) \underset{|z|\to\infty}{\sim} z^{\nu}\,, \qquad \nu = \begin{cases} \sup\,(\mathrm{m}, \mathrm{n}-1) & \text{si} \quad A(z) \neq 0 \\ \mathrm{n}-1 & \text{si} \quad A(z) = 0\,. \end{cases}
$$

Par suite,

$$
P(z)\,\beta(z)\,\widehat{T}(z) \sim z^{\nu}\left[\frac{R}{(M-a-b)\,\beta(M-b)} + r - \int_{-\infty}^{M-\mu} d\omega\,\Delta(\omega)\right].
$$

Il n'est facile de conclure que dans les deux cas suivants :

a) $\nu = -1$ ou $A(z) \equiv 0\,, \qquad B(z) \equiv \mathrm{Cte} \neq 0\,,$

b) $\nu = 0$ ou $\begin{cases} \mathrm{b}_1) & A(z) \equiv 0\,, \qquad \mathrm{d}^0 B(z) = 1 \\ \mathrm{b}_2) & A(z) \equiv \mathrm{Cte} \neq 0\,, \qquad \mathrm{d}^0 B(z) \leqq 1\,. \end{cases}$

Dans le premier cas la première condition de limite imposée au polynôme $q(z)$ montre que celui-ci est nécessairement nul ; dans le deuxième cas l'une des deux conditions de limite associée à la condition de symétrie indique que $q(z)$ doit être constant. On vérifie alors que l'intégrale J définie par (A.20) est nulle dans les deux cas.

La condition d'existence d'une solution est maintenant réduite à $K = 0$; elle est automatiquement remplie dans le cas a) ; elle fournit dans le cas b) la condition nécessaire et suffisante

$$\text{(A.26)} \quad \lim_{|z|\to\infty} z\,\hat{T}(z) = \frac{R}{(M-a-b)\,\beta(M-b)} + r - \int_{-\infty}^{M-\mu} d\omega\,\Delta(\omega) = 0\,.$$

Cette condition disparaît dans le cas particulier b_2) où l'on a

$$A(z) \equiv A, \quad B(z) \equiv B\,z + C$$

et la relation $A - B\int_{\mu}^{\infty} d\omega\,F(\omega) = 0$ puisqu'alors le terme constant de la partie asymptotique de $\beta(z)$ s'annule. On peut d'ailleurs dans ce cas mettre $\beta(z)$ sous la forme

$$\beta(z) = \int_{\mu}^{\infty} d\omega\,\frac{F(\omega)\,(B\,\omega + C)}{\omega - z}$$

ce qui ramène au cas a).

C) Détermination du polynôme $q(z)$. — Les conditions imposées au polynôme $q(z)$ ont montré que, dans chacun des deux cas a), b), il se réduit nécessairement à une constante q.

a) $\nu = -1$. — On a $q = 0$. La condition d'existence étant remplie, l'équation (A.21) possède une solution unique donnée par les formules (A.25) avec $q(z) \equiv 0$.

b) $\nu = 0$. — La valeur de q est déterminée par la condition d'existence (A.26). Celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$\text{(A.27)} \qquad q\,D(a, b, M) - R\,N(a, b, M) = 0\,,$$

avec

$$\text{(A.28)} \quad \left\{ \begin{aligned} N(a, b, M) &= \frac{1}{(M-a-b)\,\beta(M-b)} - \\ &- \frac{(b-a)\,\beta(b)}{(M-2a)\,\beta(a)\,\beta(M-a)}\left(\frac{1}{M-a-b} - \frac{1}{b-a}\right) + \\ &+ \frac{(b-a)\,\beta(b)}{2\pi\,\mathbf{i}}\int_{-\infty}^{M-\mu}\frac{d\omega}{\beta^{+}(\omega)}\left[\frac{1}{\beta^{-}(M-\omega)} - \frac{1}{\beta^{+}(M-\omega)}\right]\times \\ &\times \frac{1}{(\omega-a)\,(\omega+a-M)}\left(\frac{1}{\omega-b} - \frac{1}{\omega+b-M}\right), \\ D(a, b, M) &= \frac{(b-a)\,\beta(b)}{(M-2a)\,\beta(a)\,\beta(M-a)} - \frac{(b-a)\,\beta(b)}{2\pi\,\mathbf{i}}\times \\ &\int_{-\infty}^{M-\mu}\frac{d\omega}{\beta^{+}(\omega)}\left[\frac{1}{\beta^{-}(M-\omega)} - \frac{1}{\beta^{+}(M-\omega)}\right]\frac{1}{(\omega-a)\,(\omega+a-M)}\,. \end{aligned} \right.$$

En supposant $D(a, b, M) \neq 0$, on en déduit

$$\text{(A.29)} \qquad q = R\,N(a, b, M)/D(a, b, M)\,.$$

L'équation (A.21) possède encore une solution unique.

2. Cas $R = 0$. — L'équation proposée est homogène et sa solution est définie à une constante multiplicative près.

a) $\nu = -1$. — Puisque $q = 0$, la fonction $t(z)$ est nulle. Il résulte alors de (A.25) que $\hat{T}(z)$ est méromorphe dans tout le plan et de la forme $\lambda/(z + a - M)$.

La formule (A.12) montre enfin que cette solution ne sera acceptable que si $M = 2a$, la constante λ restant arbitraire. Le résultat se vérifie d'ailleurs directement sur les formules

$$\text{(A.1')} \qquad \beta(z) = B \int_{\mu}^{\infty} d\omega \, \frac{F(\omega)}{\omega - z},$$

$$\text{(A.22')} \quad \hat{T}(z) = \frac{B}{(z + a - M)\,\beta(M - z)} \int_{\mu}^{\infty} d\omega \, \frac{\omega - a}{\omega + z - M} F(\omega)\, \hat{T}(\omega).$$

b) $\nu = 0$. — La fonction $t(z)$ se réduit au terme contenant q. La condition (A.27), toujours valable, montre alors que l'équation proposée n'admet une solution non nulle que si l'on a $D(a, b, M) = 0$ tandis que la constante q est arbitraire. La constante b peut évidemment être éliminée de la condition précédente qui s'écrit plus simplement

$$\text{(A.30)} \qquad d(a, M) = \frac{1}{(M - 2a)\,\beta(a)\,\beta(M - a)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-M+\mu} \frac{d\omega}{\beta^{+}(\omega)} \left[\frac{1}{\beta^{-}(M - \omega)} - \frac{1}{\beta^{+}(M - \omega)} \right] - \frac{1}{(\omega - a)\,(\omega + a - M)} = 0.$$

3. Résumé. — En supposant que le comportement asymptotique de $\beta(z)$ soit donné par $\beta(z) \underset{z \to \infty}{\sim} z^{\nu}$, on a dans les deux cas $\nu = -1$, $\nu = 0$, les résultats suivants.

a) $\nu = -1$:

$R \neq 0$, l'équation (A.21) possède une solution unique donnée par les formules (A.25) dans lesquelles $q(z) \equiv 0$;

$R = 0$, l'équation (A.21) ne possède de solution que si $M = 2a$. Les solutions sont de la forme $\lambda/(z - a)$, où λ est arbitraire.

b) $\nu = 0$:

$R \neq 0$, l'équation (A.21) possède une solution unique donnée par les formules (A.25) dans lesquelles $q(z) \equiv q = R\, N(a, b, M)/D(a, b, M)$, où l'on suppose $D(a, b, M) \neq 0$, les quantités N et D étant données par les formules (A.28) ;

$R = 0$, l'équation (A.21) ne possède de solution que si $d(a, M) = 0$, où $d(a, M)$ est défini par (A.30). Les solutions sont données par les formules (A.25), dans lesquelles $q(z) \equiv q$ est arbitraire.

Références

[1] B. Jouvet, *Nuovo Cim.* [10], t. **5**, 1957, p. 1.
[2] T. D. Lee, *Phys. Review*, t. **95**, 1954, p. 1329.
[3] G. Källén & W. Pauli, *Dan. Mat. Fys. Medd.*, t. **30**, 1955, n° 7.
[4] J.-C. Houard & B. Jouvet, *Nuovo Cim.* [10], t. **18**, 1960, p. 466.
[5] M. T. Vaughn, R. Aaron & R. D. Amado, *Phys. Review*, t. **124**, 1961, p. 1258.
[6] R. Haag, *Phys. Review*, t. **112**, 1958, p. 669 ;
K. Nishijima, *Phys. Review*, t. **111**, 1958, p. 995 ;
W. Zimmermann, *Nuovo Cim.* [10], t. **10**, 1958, p. 597.
[7] H. Lehmann, *Nuovo Cim.* [10], t. **11**, 1954, p. 342.
[8] J. Hamilton & W. S. Woolcock, *Rev. mod. Physics*, t. **35**, 1963, p. 737.
[9] K. W. Ford, *Nuovo Cim.* [10], t. **24**, 1962, p. 467.
[10] P. Borgeaud, C. Bruneton, Y. Ducros, P. Falk-Vairant, O. Guisan, J. Movchet, P. Sonderegger, A. Stirling, M. Yvert, A. Tranha & S. D. Warshaw, *Phys. Letters*, t. **10**, 1964, p. 135 ;

B. Amblard, P. Borgeaud, Y. Ducros, P. Falk-Vairant, W. Lasker, O. Guisan P. Sonderegger, A. Stirling, M. Yvert, A. Tranha & S. D. Warshaw, *Phys. Letters*, t. **10**, 1964, p. 138.
[11] G. C. Wick, *Rev. mod. Physics*, t. **27**, 1955, p. 339.
[12] H. Ekstein, *Phys. Review*, t. **101**, 1956, p. 880 ; *Nuovo Cim.* [10], t. **4**, 1956, p. 1017 ; voir aussi W. Brenig & R. Haag, *Fortsch. Physik*, t. **7**, 1959, p. 183.
[13] J. M. Blatt & V. F. Weisskopf, Theoretical nuclear physics, éd. Wiley, New York, 1952, chap. X ;
M. Gell-Mann & M. L. Goldberger, *Phys. Review*, t. **91**, 1953, p. 398 ;
B. A. Lippmann, *Phys. Review*, t. **102**, 1956, p. 264.
[14] L. L. Foldy & W. Tobocman, *Phys. Review*, t. **105**, 1957, p. 1099 ;
E. Gerjuoy, *Phys. Review*, t. **109**, 1958, p. 1806.
[15] B. A. Lippmann & J. Schwinger, *Phys. Review*, t. **79**, 1950, p. 469.
[16] S. Mandelstam, *Proc. Royal Soc.* [A], t. **233**, 1955, p. 248.
[17] A. Salam, *Nuovo Cim.* [10], t. **25**, 1962, p. 224.
[18] S. S. Schweber, An introduction to relativistic quantum field theory, éd. Row, Peterson, 1961, p. 716.
[19] R. D. Amado, *Phys. Review*, t. **122**, 1961, p. 696.
[20] R. P. Kenschaft & R. D. Amado, *Jl math. Physics*, t. **5**, 1964, p. 1340.
[21] M. A. Braun, *Ž. eksper. teor. Fiz.*, t. **18**, 1964, p. 647 et t. **19**, 1964, p. 460.
[22] R. Acharya, *Nuovo Cim.* [10], t. **24**, 1962, p. 870.
[23] J. S. Dowker, *Nuovo Cim.* [10], t. **25**, 1962, p. 1135.
[24] S. Weinberg, *Phys. Review*, t. **130**, 1963, p. 776.
[25] D. Lurié & A. J. Macfarlane, *Phys. Review* [B], t. **136**, 1964, p. 816.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE. **Particule élémentaire et particule composée** 6

I. Equivalence entre particule composée et particule élémentaire à constante de renormalisation nulle 6

1. Description des modèles utilisés 6
2. Secteur **V** $\rightleftarrows$ **N**θ 8
3. Interprétation de l'équivalence dans le formalisme lagrangien 11
4. Définition du propagateur de la particule composée 13

II. Le propagateur de la particule composée 16

1. Comportement asymptotique 16
2. Représentations spectrales 18

1. Fonction spectrale du modèle Y 18
2. Fonction spectrale du modèle F 19
3. Propriétés des fonctions spectrales 21

3. Relation de dispersion pour la diffusion élastique **N**θ 24

1. Etablissement de la relation de dispersion 25
2. Test d'élémentarité 27

DEUXIÈME PARTIE. **Diffusion par une particule composée** 30

III. Diagonalisation de l'hamiltonien dans le secteur **V**$\theta \rightleftarrows$ **N**$\theta\theta$ 30

1. Etats liés 31

1. Modèle F 32
2. Modèle Y 33
3. Etude de l'équation aux valeurs propres 33
4. Limite $Z \to 0$ 35

2. Etats de diffusion **V**θ 37

1. Modèle Y 38
2. Modèle F 39

IV. Le secteur **V**$\theta \rightleftarrows$ **N**$\theta\theta$ en théorie des perturbations 42

1. La particule composée dans les états initial ou final 42
2. Calcul des amplitudes de diffusion 46

1. Equation intégrale pour la diffusion **N**$\theta\theta \to$ **N**$\theta\theta$ 47
2. Solution de l'équation (IV.25) 49
3. Amplitudes de diffusion 52

3. Discussion 56

CONCLUSION 57

Appendice. Résolution d'une équation intégrale 58

1. Enoncé du problème 58
2. Solution 59
3. Cas limite 63
4. Cas particulier 63

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

« Le groupe SU (6) dans la physique des particules élémentaires »

Vu et approuvé :
Paris, le 7 Avril 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences
Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE

LENDER	T	Biologie animale S. P. C. N. (Orsay).
MAGAT	T	Physico. chimie des radio-éléments.
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIT	T	Physio. animale (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
LEMEE	T	Ecologie végétale (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie M. P. C. (Orsay).
CHATELET	T	Chimie P. C. B.
JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique S. P. C. N.
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T	Electronique (Orsay)
BOUISSIÈRES	T	Radiochimie.
Mme COUTURE	T	Thermo. et méca. physique.
ELLEMBERGER	T	Géologie des grandes régions du globe (Orsay).
FRANC	T	Biologie animale P. C. B.
SCHNELL		Botanique tropicale.
STOLKOWSKI	T	Physiologie végétale.
ACHER	T	Chimie biologique.
BAUDOIN	T	Biologie animale P. C. B.
BEAUMONT		Biologie animale S. P. C. N.
BLAMONT		Géophysique ionosphère.
BOUREAU	T	Botanique.
CURIE D.		Physique M. G. P.
DURAND DELGA	T	Géologie.
FRÉON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des probabilités.
CAILLEUX	T	Géologie S. P. C. N.
MAGNAN		Physique électricité.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appli. à la chimie théo. et à la phy. nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie végétale S. P. C. N.
Mme CHOQUET - BRUHAT		Mécanique analytique et méca. céleste.
Mlle VEIL	T	Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Méca. phys. et expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
BROCHARD	T	Physique P. C. B. (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Math. I (Orsay).
MAZET	T	Méca. géné. (Orsay).
CAIRE		Géogra. physique et géo. dynami.
COMOLET		Méca. des fluides.
CORABŒUF	T	Physio. animale (Orsay).
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie animale P. C. B.
JULLIEN J.		Chimie S. P. C. N. (Orsay).
MALGRANGE	T	Technique mathé. de la phys. (Orsay).
OLIVIER		Anthropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	T	Physique E. N. S. (Orsay).
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Math. E. N. S. féminines.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Méca. céleste.
ABELES		Physique S. P. C. N.
AMAT	T	Physique P. C. B.
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radio-activité (Orsay).
BOUGIS		Biologie marine Villefranche/mer.
BRUHAT	T	Math. M. P. C.
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
CHABBAL	T	Physique M. G. P. (Orsay).
DEHEUVELS	T	Math. propé.
D'ESPAGNAT	T	Physique théorique (Orsay).
FURON	T	Géologie S. P. C. N.
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVES		Biologie végétale P. C. B.
GUILBERT		Physique C. U. S. Orléans.
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biolo. géné.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie P. C. B.
MEYER		Physique propé.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Méca. théorique des fluides.
ROUBINE		Electronique.
SILBER	T	Chimie P. C. B.
UEBERSFELD	T	Electronique.
YVON	T	Théories physiques.
HERVE	T	Mathématiques.
NERON	T	Math. M. P. C. (Orsay).
Mme PECKER WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique M. P. C.
LE CORRE	T	Electricité.
DELCROIX	T	Physique théorique (Orsay).
GOURDIN		Physique théorique des hautes énergies. (Orsay)
LEHMANN	T	Phys. exp. des hautes énergies.
NATAF	T	Physique nucléaire et radio-activité (Orsay).
ECHALIER		Biologie animale P. C. B.
BARRAUD		Physiolo. cellulaire.
LIORET		Physiologie végé. (Orsay).
DARS		Géologie structurale et géolo. appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Electronique (Orsay).
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (C. S. U. Orléans).
MALLIAVIN	T	Math. propé. (Orsay).
GAUDEMAR		Chimie propé.
PEREZ Y JORBA		Physique Exp. des Hautes énergies (Orsay).
DAVID	T	Chimie (agrégation Orsay).
BROUSSE	T	Mécanique théorique.
ROSCH	T	Astronomie.
GUY	T	Physique expérimentale.
LAZARD		Math. M. P. C.
MOREL Pierre		Physique M. P. C.
ARSAC		Programmation.
LEFEBVRE		Chimie M. P. C.
CHAPEVILLE		Biochimie.
BENOIT		Physique C. P. E. M.
RIO		Chimie C. P. E. M.
JAUZEIN		Géologie E. N. S.
PREVOST Geor.		BV C. P. E. M.
FAVARD P.		BA C.P.E.M.
VILKAS		Chimie C. P. E. M.
Mlle FICINI		Chimie C. P. E. M.
LEQUEUX		Astronomie.
COHEN TANNOUDJI		Physique M. P. C.
TAVERNIER		Physique C. P. E. M.
Mme ROIZEN		— —
DURAND M.		BA S. P. C. N.
PASCAUD		Physiologie.
Mme PETIT		BA C. P. E. M.
BROUSSE		Géologie (Orsay).
CAGNIAC		Physique (agrégation Orsay).
LEBERRE		Zoologie (Orsay).
SCHEFFER		Microbiologie (Orsay).
DE GENNES		Physique des solides (Orsay).
RIOU		Physique nucléé. exp. (Orsay).
CLAUSER		Chimie biol. (Orsay).
CHEVALIER		Physio. animale (Orsay).
JANCOVICI		Physique atomique (Orsay).
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire (Orsay).
FETIZON		Chimie propé. (Orsay).
CERF		Mathématiques (Orsay).

Le Secrétaire Général..... R. POULLAIN.

Imprimé en France. — Imprimerie JOUVE, 12, rue de Tournon, PARIS

Dépôt légal : 4e trimestre 1966